Section: Sciences de l'informatique *Session principale 2009*

Matière : Mathématiques (Corrigé)

Exercice 1 *(4 points)*

Cet exercice porte sur la partie « Graphe » qui est supprimée du programme officiel de la section « Sciences de l'informatique » à partir de l'année scolaire 2009/2010.

Exercice 2 *(3,5 points)*

- **Contenu :** Arithmétique.
- **Aptitudes visées :** Connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z,

Calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type: ax + by = c.

- **Corrigé :**

1) (E) : $\mathbf{2x + 3y = 5}$. On remarque que le couple $\mathbf{(1,1)}$ est une solution particulière de (E)

On a $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ (2\times 1) + (3\times 1) = 5 \end{cases}$ d'où $\mathbf{2(x - 1) = 3(1 - y)}$ on en déduit que 3 divise $\mathbf{2(x - 1)}$,

or $\mathbf{3 \wedge 2 = 1}$, d'après le lemme de Gauss on a 3 divise $\mathbf{(x - 1)}$

ainsi $\mathbf{x = 3k + 1}$, $\mathbf{k \in \mathbb{Z}}$ par suite $\mathbf{y = 1 - 2k}$. Par vérification, on a

$\mathbf{2(1 + 3k) + 3(1 - 2k) = 5}$ d'où $\mathbf{S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(1 + 3k,\ 1 - 2k)\ k \in \mathbb{Z}\}}$

2)a) $\begin{cases} n - 8 = 2(a - 8) \\ n - 3 = 3(b - 3) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$

b)

$\mathbf{2a - 3b = n + 8 - (n + 3) = \cancel{n} + 8 - \cancel{n} - 3 = 5}$

$\mathbf{(a, -b)}$ est une solution de (E) alors $\mathbf{a = 1 + 3k}$ et $\mathbf{-b = 1 - 2k \quad k \in \mathbb{Z}}$

$\mathbf{n = 2a - 8 = 2(1 + 3k) - 8 = 6(k - 1)}$

d'où n est un multiple de 6 compris entre 50 et 55.

$\mathbf{50 < -6 + 6k < 55\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 9{,}33 \simeq \frac{56}{6} < k < \frac{61}{6} = 10{,}16}$ d'où $\mathbf{k = 10}$

donc $\mathbf{n = 54,}$ $\mathbf{a = 1 + 3k = 31}$ ***et*** $\mathbf{b = 2k - 1 = 19}$

Exercice 3 (4,5 points)

- **Contenu :** Nombres complexes.
- **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- **Corrigé :**

1)a) $(1-2i)^2 = -3-4i$

b) $\Delta' = 1-(1-i)\times 4i = 1-4i-4 = -3-4i = (1-2i)^2$

d'où $z_1 = 1-i$ et $z_2 = -2$

2)a) $S_I(A) = C \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 0-1 = -1 \\ y_C = 2y_I - y_A = 2+1 = 3 \end{cases}$ d'où $z_C = -1+3i$; $C(-1+3i)$

$S_I(B) = D \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = 0+2 = 2 \\ y_D = 2y_I - y_B = 2-0 = 2 \end{cases}$ d'où $z_D = 2+2i$; $D(2+2i)$

b) $I = A * C = B * D \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme

$AB = |z_2 - z_1| = |-3+i| = \sqrt{10}$ et $AD = |z_D - z_1| = |1+3i| = \sqrt{10}$ donc $AB = AD$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Conclusion : $\begin{cases} ABCD \text{ est un parallélogramme} \\ AB = AD \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \end{cases}$ donc ABCD est un carré

Exercice 4 (5 points)

- **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- **Aptitudes visées :**
  - Exploiter la courbe d'une fonction pour lire : des images, des nombres dérivés, des limites, et le sens de variation.
  - Reconnaître qu'une fonction est la primitive d'une fonction donnée, calculer une intégrale, calculer une aire plane.

- **Corrigé :**

1)a) $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$

b)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$f(3)$	↘	0

2)a) f est f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x} = (-x^2 + (2-a)x + a - b)e^{-x}$$

b) $f(0) = b \Leftrightarrow b = -1$; $f'(0) = 0 \Leftrightarrow a = -1$

d'où pour tout réel x, $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x}$

3)a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x)e^{-x} = (x^2 - x - 1)e^{-x} = f(x)$$

b) $A = -\int_0^1 f(x)dx = -\left[F(x)\right]_0^1 = F(0) - F(1) = 0 - (-1-1)e^{-1} = \frac{2}{e}\ u.a$

Exercice 5 (3 points)

- **Contenu :** Probabilité uniforme, évènements indépendants, variable aléatoire.
- **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un évènement, interpréter la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- **Corrigé :**

1)a) A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0{,}0003$

b) Soit l'évènement D : « La calculatrice est défectueuse »

$$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}01 + 0{,}03 - 0{,}0003 = 0{,}0397$$

2) Soit X : le nombre de calculatrices défectueuses.

$$p(X = 2) = C_{20}^2 (p(D))^2 (1 - p(D))^{18} = 0{,}144$$

3) $p(X \geq 1) < 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) < 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - (0{,}9603)^n < 0{,}5 \Leftrightarrow (0{,}9603)^n > 0{,}5$

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}9603) > -\ln 2$ ($x \mapsto \ln x$ est croissante)

$\Leftrightarrow n < \frac{-\ln 2}{\ln(0{,}9603)} \Leftrightarrow n < 17{,}11$ d'où le nombre maximum de calculatrices est 17