CORRIGE

Exercice n°1

- **Contenu** : Arithmétique : Congruence dans Z, solutions d'une équation du type $ax+by=c$ où a, b et c sont des entiers relatifs,calcul du PGCD, calcul du reste de la division euclidienne dans Z, divisibilité dans Z .
- **Aptitudes visées :** Résoudre dans Z², une équation du type ax + by = c, déterminer le pgcd de deux entiers, décider de la divisibilité d'un nombre par un autre.
- **Corrigé :**

1)	2)	3)	4)
a	a	c	c

Exercice n°2

- **Contenu :** Nombres complexes :Equation complexe du second degré, nature d'un quadrilatère.
- **Aptitudes visées:** Résoudre une équation complexe du second degré, interpréter géométriquement les affixes de points pour : déterminer la nature d'un quadrilatère (caractéristiques d'un carré).
- **Corrigé :**

1) a) Il s'agit d'un développement utilisant une identité remarquable : $(3+i)^2=9-1+6i=8+6i$

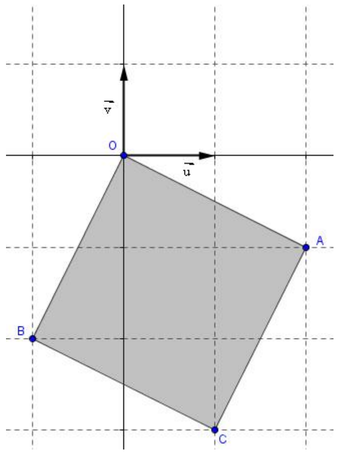
b) Il s'agit d'une équation complexe du second : $(E): z^2-(1-3i)z-(4+3i)=0$

Le discriminant est : $\Delta=\left(-(1-3i)\right)^2-4\times1\times\left(-(4+3i)\right)=-8-6i+16+12i=8+6i=(3+i)^2$

Donc les solutions sont $z'=\dfrac{1-3i+3+i}{2}=2-i$ et $z'=\dfrac{1-3i-3-i}{2}=-1-2i$.

$$S_{\mathbb{C}}=\{\ 2-i\ ;\ -1-2i\ \}.$$

2) a) $z_A=2-i$, $z_B=-1-2i$ et $z_C=1-3i$



b- $\text{aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)=z_A=2-i$ et $\text{aff}\left(\overrightarrow{BC}\right)=z_C-z_B=1-3i+1+2i=2-i=\text{aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)$

donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ d'où OACB est parallélogramme.

$OA=|z_A|=|2-i|=\sqrt{5}$ et $OB=|z_B|=|-1-2i|=\sqrt{5}$ donc OA = OB ainsi OACB est un losange.

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $2\times(-1)+(-1)\times(-2)=-2+2=0$ donc $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ et par suite OACB est un carré.

Exercice n°3

- ✓ **Contenu :** suites réelles, raisonnement par récurrence, suite géométrique, convergence d'une suite, limite d'une suite.
- ✓ **Aptitudes visées :** Montrer une proposition par récurrence, montrer qu'une suite est convergente, reconnaitre une suite géométrique et ses proprietés, déterminer la limite d'une suite.
- ✓ **Corrigé :**

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \text{IN} \end{cases}$

1) a) Utilisation du principe de raisonnement par récurrence :

* Pour n = 0 : $u_0 = 2 < 6$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n < 6$ et démontrons que $u_{n+1} < 6$

$u_n < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 < 6$ d'où $u_{n+1} < 6$

D'où la conclusion.

b) Sens de variation de la suite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 3 = -\frac{1}{2}(u_n - 6)$

or $u_n < 6$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et par suite (u_n) est croissante.

c) On a : $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (u_n) \text{ est majorée par 6} \end{cases}$ donc (u_n) est convergente

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2}\ell + 3$ d'où $\ell = 6$

2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = u_n - 6$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$

ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

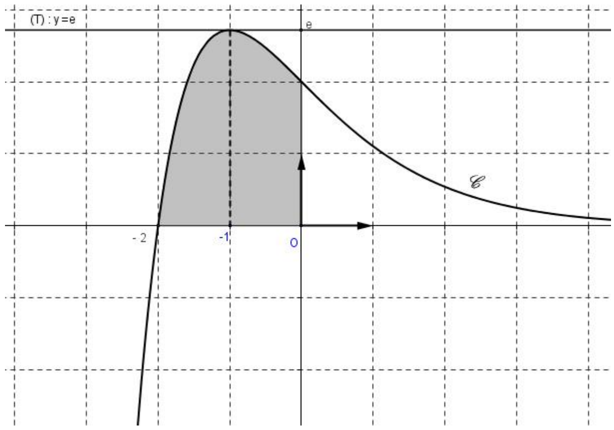
$v_0 = u_0 - 6 = 2 - 6 = -4$

b) $v_n = v_0 q^n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .D'autre part $v_n = u_n - 6 \Leftrightarrow u_n = v_n + 6 = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 6$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

Exercice n°4

- ✓ **Contenu :** Etude de fonctions (lecture d'une courbe) , fonction exponentielle, dérivabilité, primitive d'une fonction. calcul d'une intégrale en utilisant une primitive.
- ✓ **Aptitudes visées :** lire graphiquement une courbe pour déterminer :les limites, le signe d'une fonction , calculer la dérivée d'une fonction, trouver une primitive puis calculer une aire .



1) a) *f(-2) = 0 et f(0) = 2 : lecture graphique immédiate sur la courbe C .
   * f '(-1) = 0 : lecture graphique de la pente de la tangente (*T*) (tangente horizontale)

b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ puisque l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe C de f au voisinage de +∞

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ puisque C admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de -∞

c) D'après la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses on a :

* $f(x)\le 0$ si $x\in\left]-\infty\ ,\ -2\right]$
* $f(x)\ge 0$ si $x\in\left[-2\ ,\ +\infty\right[$
* $f(x)=0$ ssi x = -2

2) $f(x)=(x+2)e^{-x}$

a) f est dérivable sur IR et pour tout réel x, $f'(x)=e^{-x}+(x+2)\times\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=e^{-x}-f(x)$ donc $f(x)=e^{-x}-f'(x)$

b) f est continue sur IR donc elle admet une primitive F sur IR ,
or d'après a) $f(x)=e^{-x}-f'(x)$ ce qui donne :

$F(x)=-e^{-x}-f(x)=-e^{-x}-(x+2)e^{-x}=(-x-3)e^{-x}$.

c) Soit A l'aire du domaine limité par la courbe C, les deux axes des coordonnées et la droite d'équation x = -2.

$$A=\int_{-2}^{0}|f(x)|dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx \quad \text{car } f(x)\ge 0 \text{ sur } [-2,0]$$

$$=\left[F(x)\right]_{-2}^{0}=F(0)-F(-2)=-3-\left(-e^{2}\right)=e^{2}-3 \quad \text{u.a}$$