

Exercice 1 (4,5 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes – géométrie.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Corrigé :**

1) B est le milieu du segment [AC] $\Leftrightarrow z_B = \frac{z_A + z_C}{2}$

$\Leftrightarrow -2z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

2) a) $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$

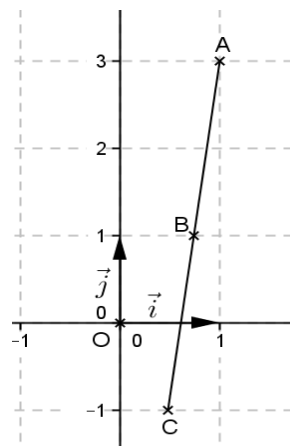
b) $\Delta = 7 + 24i$ alors $\delta = 4 + 3i$ est une racine carrée de Δ

$z' = \frac{-i - 4 - 3i}{-4} = 1 + i$, $z'' = \frac{-i + 4 + 3i}{-4} = -1 - \frac{1}{2}i$

$S_C = \{1 + i, -1 - \frac{1}{2}i\}$

3) a) $iz = i(-1 - \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} - i$

b) Comme z est une solution de l'équation (E) alors B est le milieu du segment [AC]. (voir figure)



Exercice 2 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Etudier une suite récurrente, reconnaître un minorant d'une suite, étudier la convergence d'une suite à l'aide d'une suite géométrique.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + U_{n-1}^2 + 2U_{n-1} = (1 + U_{n-1})^2$

b) Par récurrence :

On a $U_0 = -\frac{1}{2} > -1$

Soit n un entier naturel, on suppose que $U_n > -1$

On a $U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n$.

$1 + U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n + 1$
 $= (U_n + 1)^2$

On a $U_n > -1$ donc $(U_n + 1)^2 > 0$

et par suite $U_{n+1} > -1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n > -1$

2) a) Pour tout un entier naturel n, $V_{n+1} = \ln(1 + U_{n+1}) = \ln(1 + U_n)^2 = 2 \ln(1 + U_n) = 2 V_n$

Conclusion : V est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme

$V_0 = \ln(1 + U_0) = \ln(1 - \frac{1}{2}) = -\ln 2$

b) Pour tout un entier naturel n, $V_n = V_0 q^n = -2^n \ln 2$

On a $V_n = \ln(1 + U_n)$ alors $U_n = e^{V_n} - 1 = e^{-2^n \ln 2} - 1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{V_n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$

Exercice 3 (4,5 points)

✓ **Contenu :** Matrices, équation de tangente à une courbe, point d'inflexion et dérivée seconde, système linéaire 3×3 .

✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par un système linéaire, reconnaître l'inverse d'une matrice d'ordre 3, résoudre un système linéaire 3×3 , interpréter le nombre dérivé d'une fonction en un point, appliquer le théorème relatif au point d'inflexion et la dérivée seconde.

✓ **Corrigé :**

1)

$$a) \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_3$$

$$b) \quad A \times B = 5I_3 \text{ alors } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{5} B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2)

a) La droite d'équation $y = 4x - 4$ est tangente à (C) au point d'abscisse 1 signifie $f'(1) = 4$ et $f(1) = 0$.

« (C) admet un point d'inflexion d'abscisse -1 » donne $f''(-1) = 0$

$$f(x) = ax^3 + ax^2 + c \Rightarrow f(1) = a + b + c$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(1) = 3a + 2b + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(-1) = -6a + 2b$$

$$\text{Conclusion : } a, b \text{ et } c \text{ vérifient le système (S) : } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \text{ signifie } A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ signifie } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : Pour tout réel } x, f(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{16}{5}x$$

Exercice 4 (6 points)

✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.

✓ **Aptitudes visées :** Lire un graphique pour : déterminer les limites d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, reconnaître une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.

✓ **Corrigé :**

1) Traçage de T : voir graphique

2) a) $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

