

Mathématiques
Sciences de l'informatique
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

1) $64^{100} \equiv 1[7]$. **Vrai**

On a $64 \equiv 1[7]$ d'où $64^{100} \equiv 1[7]$.

2) Le reste de la division euclidienne de 9^{2013} par 5 est 1. **Faux**

On a $9 \equiv -1[5]$ d'où $9^{2013} \equiv (-1)^{2013}[5] \equiv -1[5] \equiv 4[5]$.

D'où le reste de la division euclidienne de 9^{2013} par 5 est 4.

3) Il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que $4x + 5y = 1$. **Vrai**

Les entiers 4 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout il existe des couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que $4x + 5y = 1$.

Le couple $(4 ; -3)$ est l'un de ces couples.

4) Si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a + b = 17$, alors a et b sont premiers entre eux. **Vrai**

Soit d le pgcd de a et b. On a d divise a et d divise b alors d divise $a + b$ d'où d divise 17.

Donc d est égal à 1 ou égal à 17.

Si $d = 17$ alors $a \geq 17$ et $b \geq 17$ et $a + b \geq 34$, or $a + b = 17$, d'où $d = 1$.

Ainsi a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2

1) $P = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) $P \times Q = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$

b) On a : $P \times Q = 3I_3 \Leftrightarrow P \times \frac{1}{3}Q = I_3$

D'où la matrice P est inversible et son inverse est la matrice $\frac{1}{3}Q$.

$$P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

2) On pose x , y et z les nombres de cartes graphiques respectivement de types A, B et C fabriquées au cours de cette journée.

Le nombre de circuits de type C_1 utilisés, au cours de cette journée, est de 235 soit, $5x$ pour le modèle A, $7y$ pour le modèle B et $9z$ pour le modèle C. Donc $5x + 7y + 9z = 235$.

De même, le nombre de circuits de type C_2 utilisés, au cours de cette journée, est de 65 et on a : $x + 2y + 3z = 65$.

De même, le nombre de circuits de type C_3 utilisés, au cours de cette journée, est de 80 et on a : $2x + 2y + 3z = 80$.

La situation se résume par le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 7y + 9z = 235 \\ x + 2y + 3z = 65 \\ 2x + 2y + 3z = 80 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x + 7y + 9z = 235 \\ x + 2y + 3z = 65 \\ 2x + 2y + 3z = 80 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{P} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi le nombre de cartes graphiques, fabriquées au cours de cette journée, 15 du modèle A, 10 du modèle B et 10 du modèle C.

Exercice 3

$$f(x) = x - e \ln(x) ;]0; +\infty[.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - e \ln(x) = +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$$

b) $f'(x) = 1 - e \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}$; $x > 0$.

c) Le tableau de variation de f est :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$		0
			$+\infty$

2) a) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e \frac{\ln(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e \ln(x) = -\infty$.

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Pour étudier la position de (C) par rapport à Δ , on étudie le signe de $f(x) - x$.

$$f(x) - x = -e \ln(x) ; x > 0.$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		+	0
Position de (C) par rapport à Δ	(C) est au dessus de Δ	(C) traverse Δ	(C) est au dessous de Δ

c) Voir figure.

3) a) $F: x \mapsto x \ln(x) - x$; $x \in]0; +\infty[$.

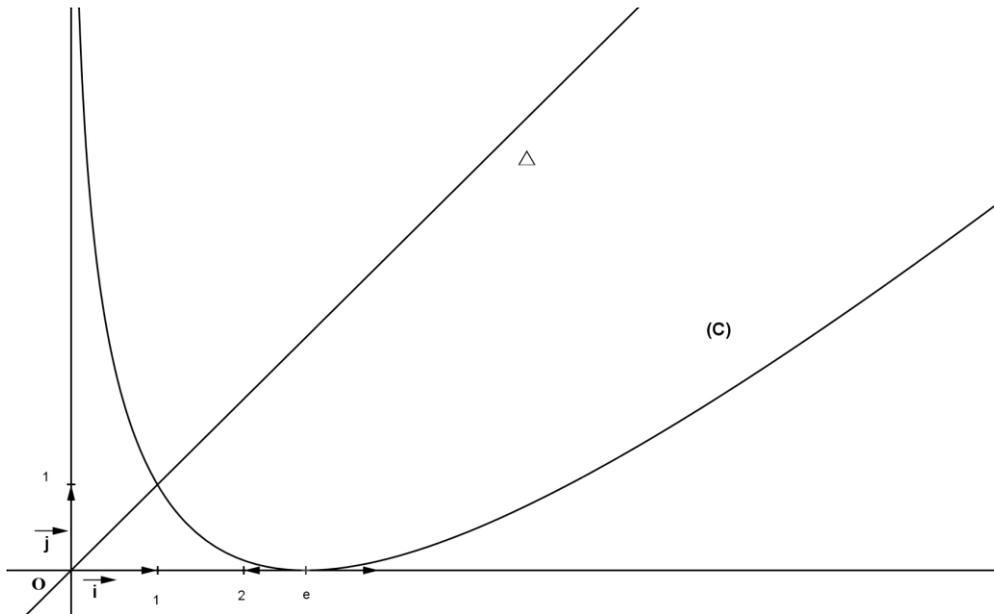
$$F(x) = x \ln(x) - x$$

$$F'(x) = \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$$

D'où F est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.

b) On note A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$A = \int_1^e (x - f(x)) dx = \int_1^e e \ln(x) dx = [eF(x)]_1^e = e(F(e) - F(1)) = e \text{ unité d'aire.}$$



Exercice 4

1) U la suite définie sur \mathbb{N}^* par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} ; \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{cases}$$

$$\text{a) } U_2 = U_1 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$U_3 = U_2 + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

- $U_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$, d'où l'égalité est vérifiée pour $n = 1$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que l'égalité est vraie pour k , on a donc $U_k = 1 - \frac{1}{k+1}$.

- Montrons que l'égalité est vraie pour $k+1$.

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

D'où l'égalité est vraie pour $k+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence on a :

$$U_n = 1 - \frac{1}{n+1} ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

2) V la suite définie sur \mathbb{N}^* par $V_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}} V_n$.

$$a) V_2 = e^{\frac{-1}{2}} V_1 = e^{\frac{-1}{2}}.$$

$$V_3 = e^{\frac{-1}{2 \times 3}} V_2 = e^{\frac{-1}{6}} e^{\frac{-1}{2}} = e^{\frac{-1}{6} + \frac{-1}{2}} = e^{\frac{-2}{3}}.$$

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n > 0$.

Raisonnons par récurrence :

- $V_1 = 1 > 0$, d'où la proposition est vérifiée pour $n = 1$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition est vraie pour k , on a donc $V_k > 0$.
- Montrons que la proposition est vraie pour $k + 1$.

$$V_k > 0 \text{ et } e^{\frac{-1}{k(k+1)}} > 0 \text{ d'où } V_{k+1} = e^{\frac{-1}{k(k+1)}} V_k > 0.$$

D'où la proposition est vraie pour $k + 1$.

Ainsi $V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$V_{n+1} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}} V_n \stackrel{V_n > 0}{\Leftrightarrow} \frac{V_{n+1}}{V_n} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}} < 1$$

$$\text{On a } V_n > 0 \text{ et } \frac{V_{n+1}}{V_n} < 1 \text{ d'où } V_{n+1} < V_n$$

Ainsi la suite V est décroissante.

La suite V est décroissante et minorée par 0 ($V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), donc elle converge.

3) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $V_n = e^{-U_{n-1}}$.

Raisonnons par récurrence :

- $V_2 = e^{\frac{-1}{2}} = e^{-U_1}$, d'où la proposition est vérifiée pour $n = 2$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que la proposition est vraie pour k , on a donc $V_k = e^{-U_{k-1}}$.
- Montrons que la proposition est vraie pour $k + 1$.

$$V_{k+1} = e^{\frac{-1}{k(k+1)}} V_k = e^{\frac{-1}{k(k+1)}} e^{-U_{k-1}} = e^{\frac{-1}{k(k+1)} - U_{k-1}} = e^{-(U_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)})} = e^{-U_k}.$$

D'où la proposition est vraie pour $k + 1$.

Ainsi Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $V_n = e^{-U_{n-1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-U_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1 + \frac{1}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$