REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section : **Sciences de l'informatique**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $64^{100} \equiv 1[7]$.

2) Le reste de la division euclidienne de 9^{2013} par 5 est 1.

3) Il existe des couples (x ; y) d'entiers relatifs tels que $4x + 5y = 1$.

4) Si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que a + b = 17, alors a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2 (4 points)

1) On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $P \times Q$.

b) En déduire que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

2) Une usine fabrique trois modèles de cartes graphiques A, B et C. Pour chaque modèle, elle utilise trois types de circuits C_1, C_2 et C_3.
Le tableau ci-dessous donne le nombre de circuits nécessaires pour la fabrication de chaque modèle de cartes :

Types \ Modèles	A	B	C
C_1	5	7	9
C_2	1	2	3
C_3	2	2	3

En une journée, cette usine a utilisé 235 circuits de type C_1, 65 circuits de type C_2 et 80 circuits de type C_3 pour fabriquer des cartes graphiques des trois modèles A, B et C.
Déterminer le nombre de cartes graphiques pour chacun des modèles A, B et C au cours de cette journée.

Exercice 3 (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - e\ln(x)$ où e est le réel tel que $\ln(e) = 1$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x-e}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et (C).

3) a) Justifier que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction "ln" sur $]0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4 (5,5 points)

1) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$U_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $U_n = U_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

a) Calculer U_2 et U_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}}\, V_n$.

a) Calculer V_2 et V_3.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n > 0$.

c) Montrer que la suite V est décroissante et en déduire qu'elle converge.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $V_n = e^{-U_{n-1}}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.