

Exercice 1 (4 points)

- 1) Soit f la fonction définie sur $[1, 4]$ par $f(x) = \frac{4}{5-x}$.
- a) Construire dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C) de la fonction f .
- b) Montrer que $f([1, 4]) = [1, 4]$.
- 2) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
- a) On considère les points $M_0(u_0, 0)$, $M_1(u_1, 0)$, $M_2(u_2, 0)$ et $M_3(u_3, 0)$.
Tracer la droite $\Delta : y = x$ puis, sans calcul, placer les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 .
- b) Quelle conjecture peut-on émettre à propos de la convergence de la suite (u_n) ?
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.
- b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-1)e^{2x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique est 1 cm).

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- d) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- b) Vérifier que pour tout réel x , $(x > 1)$ signifie que $(e^{2x} > e^2)$
- c) Étudier la position relative de T et (C) .
- 3) a) Montrer que $I(0, -1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) .
- b) Déterminer une équation de la tangente T' à la courbe (C) au point I .
- 4) Construire T et T' puis (C) .
- 5) Soit α un réel négatif, on désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.
- a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\alpha)$.
- b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.

Exercice 3 (5 points)

Dans une classe de 25 élèves (15 filles et 10 garçons), 16 élèves (9 filles et 7 garçons) ont chacun une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

Une épreuve consiste à choisir au hasard deux élèves de cette classe.

1) On considère l'évènement A : « Chacun des deux élèves choisis a une moyenne en mathématiques supérieure à 10 ».

a) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$.

b) Calculer la probabilité de l'évènement B : « les deux élèves choisis sont des filles »

c) Calculer $p(B / A)$.

2) On associe à cette épreuve la variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre d'élèves ayant une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

Déterminer la loi de probabilité de X.

3) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite.

Quelle est la probabilité que l'évènement A soit réalisé au moins trois fois ?

Exercice 4 (5 points)

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de A. En déduire que la matrice A est inversible.

2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$. En déduire la matrice A^{-1} inverse de A.

3) Un hôtel pratique trois tarifs différents pour un séjour de 24 heures.

Le tarif x pour les enfants de moins de 12 ans.

Le tarif y pour les enfants de 12 à 18 ans.

Le tarif z pour les personnes de plus de 18 ans.

Trois familles ont passé un séjour de 24 heures dans cet hôtel.

- La famille 1, formée du père, de la mère et de trois enfants de 7, 10 et 15 ans a payé 200 dinars.
- La famille 2, formée du père, de la mère et de cinq enfants de 4, 8, 13, 15 et 19 ans a payé 290 dinars.
- La famille 3, formée de la mère et de deux enfants de 13 et 16 ans a payé 130 dinars.

a) Traduire la situation précédente par un système d'équations.

b) Déterminer les trois tarifs x, y et z.