Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2014

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1) Vrai

Soit (x , y) une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $5x-6y=6$.

On a : $5x-6y=6 \Leftrightarrow 5x=6+6y$

$\Leftrightarrow 5x=6(1+y).$

D'où 6 divise 5 x.

6 divise 5 x et 6 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 6 divise x.

2) Faux.

Supposons que (x, y) une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $3x+6y=8$.

$3x+6y=8 \Rightarrow 3(x+2y)=8$

$\Rightarrow$ 3 divise 8

Ce qui est absurde.

3) Vrai

On a : $3\equiv 3[5] \Rightarrow 3^2\equiv 9[5]\equiv(-1)[5]$

$\Rightarrow \left(3^2\right)^{1007}\equiv(-1)^{1007}[5]$

$\Rightarrow 3^{2014}\equiv(-1)[5]$

$\Rightarrow 3^{2014}\equiv 4[5]$

D'où le reste de la division euclidienne de 3^{2014} par 5 est 4.

4) Vrai

$n\equiv 1[2] \Rightarrow n-1\equiv 0[2]$, d'où 2 divise $n-1$.

$n\equiv 1[3] \Rightarrow n-1\equiv 0[3]$, d'où 3 divise $n-1$.

2 et 3 divisent $n-1$, d'où 6 divise $n-1$. Par conséquent $n-1\equiv 0[6]$ et par suite $n\equiv 1[6]$.

Exercice 2

$f(x)=(1-\ln x)^2$; $x\in\,]0,+\infty[$.

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\ln x)^2=+\infty$; car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2 = +\infty \text{ ; car } \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\ln x+\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0.$$

b) $\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$, d'où la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale pour la courbe (C).

$\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2)a) $f(x) = (1-\ln x)^2$; $x \in \left]0, +\infty\right[$.

La fonction f est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ et on a :

$$f'(x) = 2\,(1-\ln x)'\,(1-\ln x) = 2\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x) = -\frac{2}{x}(1-\ln x).$$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x}(1-\ln x) = 0$

$\Leftrightarrow 1-\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

Le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Voir figure.

3) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

a) $F(x) = x(5+\ln^2 x-4\ln x)$; $x \in \left]0, +\infty\right[$.

$F'(x) = 5+\ln^2 x-4\ln x + x(2\,\frac{1}{x}\ln x-4\frac{1}{x})$; $x \in \left]0, +\infty\right[$.

$= 5+\ln^2 x-4\ln x + 2\ln x-4$

$= 1-2\ln x+\ln^2 x$

$= (1-\ln x)^2$

$= f(x)$

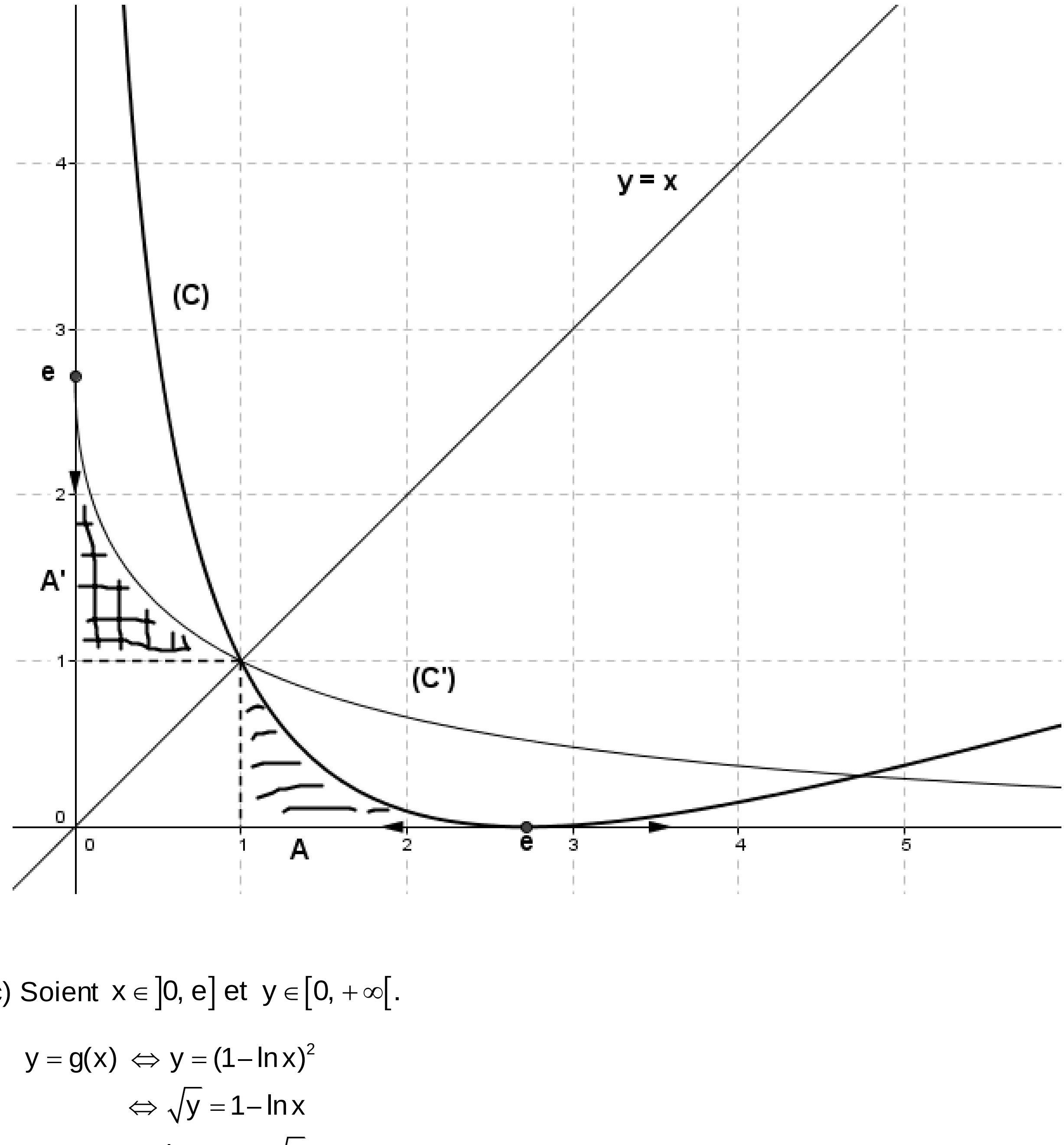
D'où F est une primitive de f sur $\left]0, +\infty\right[$.

b) $A = \int_1^e f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_1^e = F(e) - F(1) = 2e - 5$ unité d'aire.

4) g la restriction de f à l'intervalle $\left]0, e\right]$.

a) f est continue et strictement décroissante sur $\left]0, e\right]$, d'où g est continue et strictement décroissante sur $\left]0, e\right]$. Par conséquent g est une bijection de $\left]0, e\right]$ sur l'intervalle $J = g\left(\left]0, e\right]\right) = \left[0, +\infty\right[$.

b)



c) Soient $x \in \left]0, e\right]$ et $y \in \left[0, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} y = g(x) &\Leftrightarrow y = (1 - \ln x)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - \ln x \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 - \sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow x = e^{1-\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

D'où $g^{-1}(x) = e^{1-\sqrt{x}}$; pour tout $x \in \left[0, +\infty\right[$.

5) On se propose de calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}dx$.

a) Les courbes de g et g^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Par symétrie, les deux parties du plan suivantes ont la même aire (voir figure):

i. La partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

ii. La partie du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des ordonnées et les droites d'équation $y=1$ et $y=e$.

A étant l'aire de la première partie (calculée précédemment).

On note A' l'aire de la deuxième partie. A' est aussi l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, moins l'aire du carré de côté 1.

D'où $A=A'=(\int_0^1 e^{1-\sqrt{x}}dx)-1$.

b) $A=(\int_0^1 e^{1-\sqrt{x}}dx)-1=(\int_0^1 e.e^{-\sqrt{x}}dx)-1=(e.\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}dx)-1=e.I-1$.

$A=e.I-1$, d'autre part on a $A=2e-5$.

$2e-5=eI-1 \Leftrightarrow eI=2e-4$

$\Leftrightarrow I=2-\frac{4}{e}$.

Exercice 3

1)a) $(1-5i)^2=1-2\times1\times5i+(5i)^2=1-10i-25=-24-10i$.

b) On a dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(3-i)z+8+i=0$.

Calculons le discriminant Δ :
$\Delta=(3-i)^2-4(8+i)=9-6i-1-32-4i=-24-10i=(1-5i)^2$.

D'où $1-5i$ est une racine carrée de Δ.

D'où les racines de l'équation sont :

$$z=\frac{-(3-i)-(1-5i)}{2}=-2+3i \ ; \ z'=\frac{-(3-i)+(1-5i)}{2}=-1-2i.$$

Ainsi $S_{\mathbb{C}}=\{-2+3i \ ; \ -1-2i\}$.

2) A, B et C les points d'affixe respectives $z_A=-2+3i$, $z_B=-1-2i$ et $z_C=4-i$.

a) Voir la figure.

b) Montrons que le triangle ABC est isocèle rectangle.

$AB=|z_B-z_A|=|-1-2i-(-2+3i)|=|1-5i|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$.

$AC = |z_C - z_A| = |4 - i - (-2 + 3i)| = |6 - 4i| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}.$

$BC = |z_C - z_B| = |4 - i - (-1 - 2i)| = |5 + i| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$

On a $AB = BC$, d'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

$AB^2 = 26$; $AC^2 = 52$ et $BC^2 = 26$. D'où $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Le triangle ABC est alors rectangle en B.

Ainsi ABC est un triangle isocèle rectangle en B.

c) Soit I le milieu du segment $[AC]$. On a $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{-2 + 3i + 4 - i}{2} = \dfrac{2 + 2i}{2} = 1 + i.$

Soit D le point pour lequel ABCD est un carré.

D est le symétrique de B par rapport au point I, d'où I est le milieu du segment $[BD]$.

$$z_I = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{-1 - 2i + z_D}{2} \Leftrightarrow -1 - 2i + z_D = 2z_I$$

$$\Leftrightarrow z_D = 2z_I + 1 + 2i = 2(1 + i) + 1 + 2i = 3 + 4i$$

D'où $z_D = 3 + 4i.$

3) (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 - i| = \sqrt{13}.$

a) $M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z - 1 - i| = \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow |z - (1 + i)| = \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow |z - z_I| = \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow IM = \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{13}.$

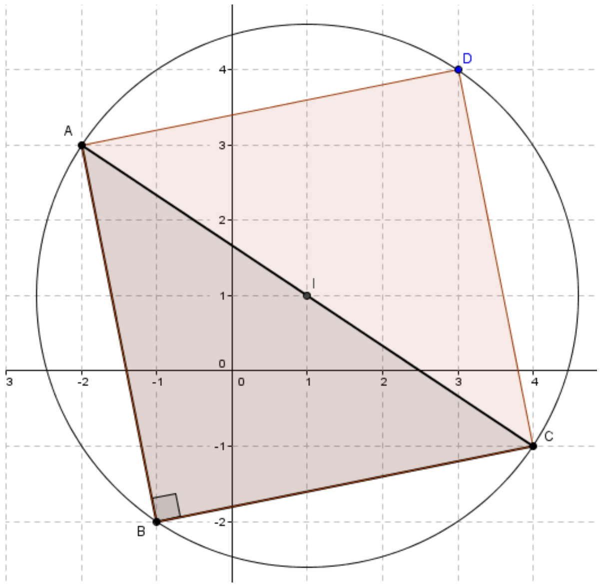
D'où (Γ) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{13}.$

b) On a $IA = IB = IC = ID$ puisque I est le centre du carré.

$IA = |z_A - z_I| = |-2 + 3i - (1 + i)| = |-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

Ainsi $IA = IB = IC = ID = \sqrt{13}.$

D'où le cercle (Γ) passe par les sommes du carré ABCD. (Γ) est le cercle circonscrit du carré.

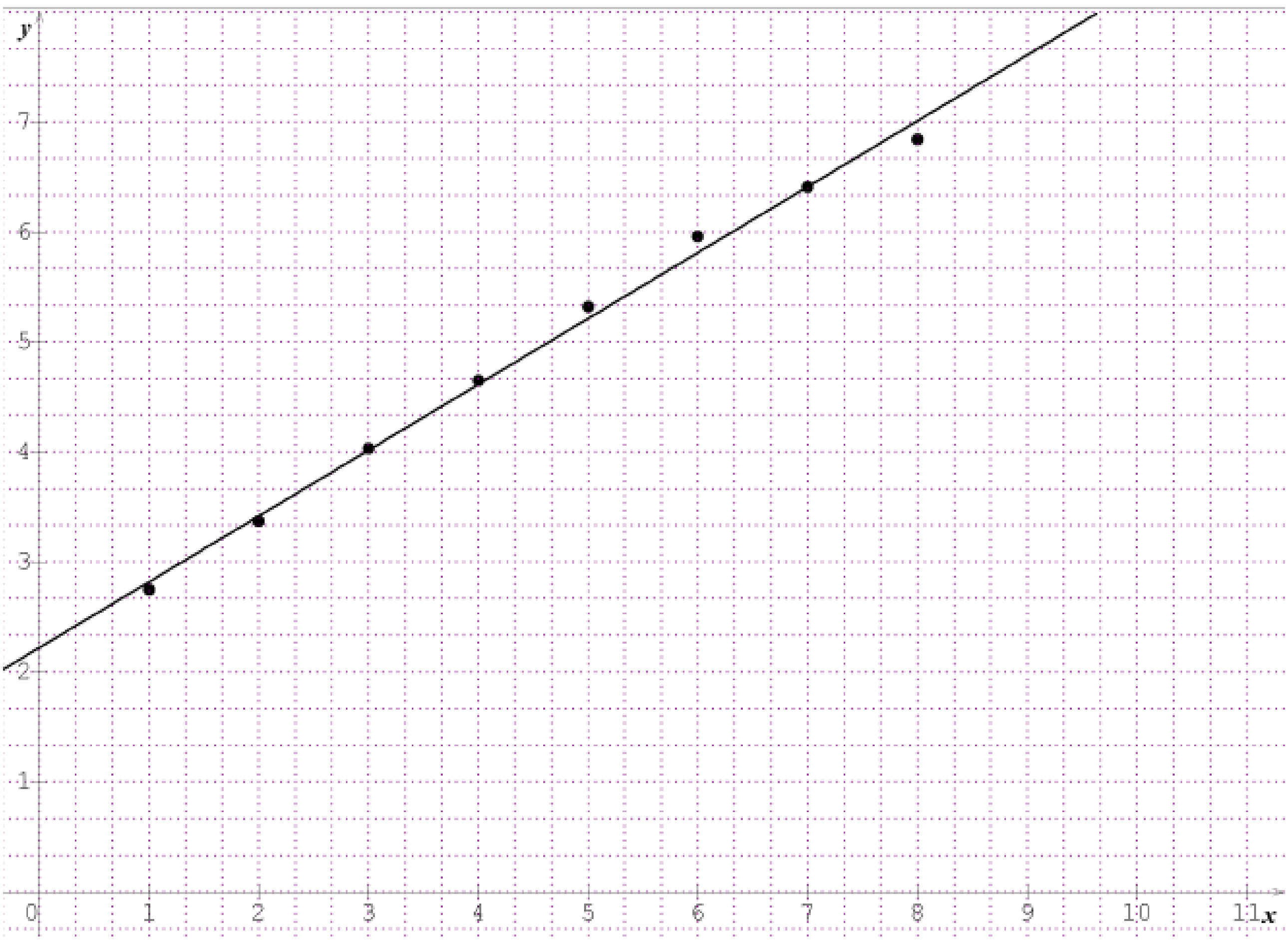


Exercice 4

Le tableau suivant donne (en milliards) le nombre d'abonnements au téléphone mobile dans le monde.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif (y_i)	2,75	3,37	4,03	4,65	5,32	5,96	6,41	6,84

1)a)



b) La forme allongée du nuage des points permet d'envisager un ajustement affine.

2)a) On calcule à l'aide de la calculatrice le coefficient de corrélation $r = 0{,}997673$.

b) On détermine les coefficients a et b à l'aide de la calculatrice :

$a = 0{,}598690 \simeq 0{,}6$; $b = 2{,}222142 \simeq 2{,}22$

L'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 0{,}6\,x + 2{,}22$.

3) On suppose que cette tendance se maintient.

a) Le rang de l'année 2014 est 9.

Une estimation (en milliards) du nombre d'abonnements en 2014 est :
$y = 0{,}6 \times 9 + 2{,}22 = 7{,}62$.

b) L'année pour laquelle le nombre d'abonnements atteindra 10 milliards pour la première fois :

$$\begin{aligned} 0{,}6\,x + 2{,}22 = 10 &\Leftrightarrow 0{,}6\,x = 10 - 2{,}22 \\ &\Leftrightarrow 0{,}6\,x = 7{,}78 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7{,}78}{0{,}6} = 12{,}966 \simeq 13. \end{aligned}$$

13 est le rang de l'année 2018.

2018 est l'année pour laquelle le nombre d'abonnements atteindra 10 milliards pour la première fois.