

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
Faux	vrai	vrai	vrai

1) On peut remarquer que la deuxième ligne de la matrice B est nulle, donc B est non inversible. Par conséquent B ne peut pas être l'inverse de A.

$$2) M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} ; \det M = (-1) \times \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

$\det M \neq 0$, d'où la matrice M est inversible.

$$3) u_n = \frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

$$4) v_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1, \text{ car } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1. \text{ D'où } v \text{ est convergente.}$$

Exercice 2

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$. (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 2e^x = 0, \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 2e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 2e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} (e^x - 2) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

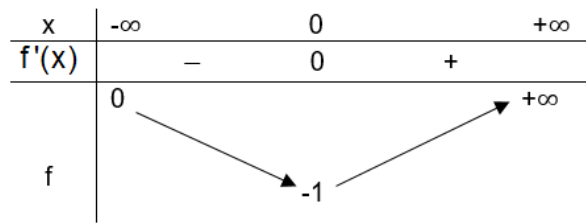
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (\mathcal{C}) admet une branche parabolique de direction l'axe (O, \vec{j}) .

b) la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x ; x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1) ; x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^x(e^x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 ; \text{ car } e^x > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{2)a) } f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x(e^x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2. \end{aligned}$$

Ainsi l'intersection de la courbe (\mathcal{C}) et l'axe (O, \vec{i}) est le point de coordonnées $(\ln 2, 0)$.

b) Voir figure.

3)a) Soit a un réel strictement négatif.

\mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}), les axes du repère et la droite d'équation $x = a$.

$$\mathcal{A} = \int_a^0 -f(x) dx = -\int_a^0 (e^{2x} - 2e^x) dx = -\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x \right]_a^0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2a} - 2e^a \text{ unité d'aire.}$$

$$\text{b) } \lim_{a \rightarrow -\infty} \mathcal{A} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2a} - 2e^a = \frac{3}{2}.$$

4) Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.

a) On a g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, d'où g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.

b) Voir figure.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)^2 - 1 = e^{2x} - 2e^x + 1 - 1 = e^{2x} - 2e^x = f(x)$. D'où $f(x) = (e^x - 1)^2 - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soient $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [-1, +\infty[$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (e^x - 1)^2 - 1$$

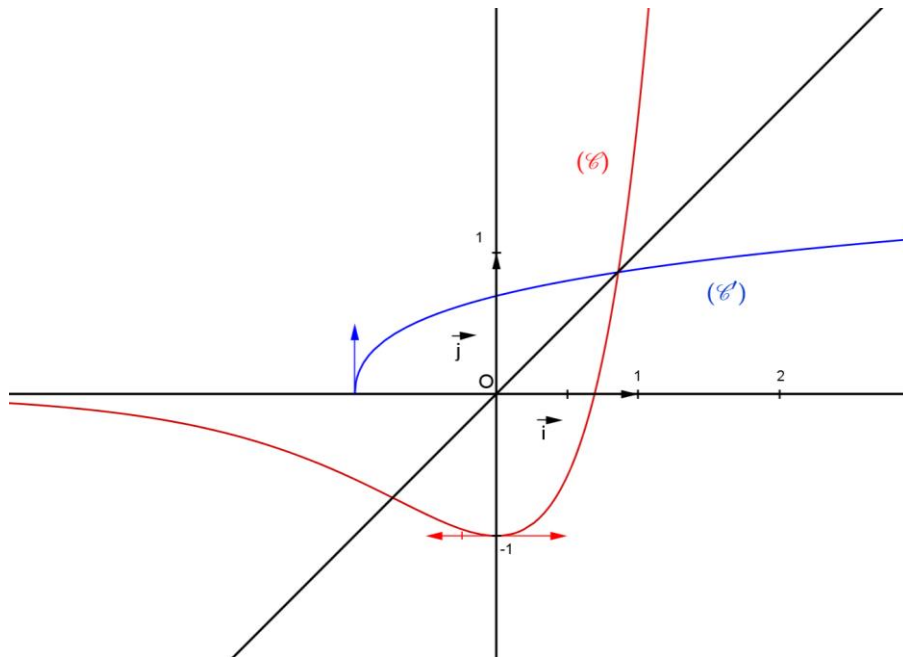
$$\Leftrightarrow y + 1 = (e^x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y+1} = e^x - 1 ; \text{ on a } y+1 \geq 0 \text{ et } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 + \sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{y+1}).$$

Ainsi $g^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{x+1})$; pour tout $x \in [-1, +\infty[$.



Exercice 3

Soit n un entier naturel, on considère les entiers $p = n + 5$ et $q = 2n + 3$ et on note $d = \text{PGCD}(p, q)$.

1)a) $2p - q = 2(n + 5) - (2n + 3) = 7$.

On a d divise p et q , donc d divise $2p - q$, par conséquent d divise 7 . Ainsi $d = 1$ ou $d = 7$.

b) Supposons que p est un multiple de 7 . Il existe alors un entier k tel que $p = 7k$.

$$\begin{aligned} 2p - q = 7 &\Leftrightarrow 2 \times 7k - q = 7 \\ &\Leftrightarrow q = 2 \times 7k - 7 \\ &\Leftrightarrow q = 7 \times (2k - 1) \end{aligned}$$

D'où q est un multiple de 7 .

c) Montrons que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

« \Rightarrow »

Supposons que p est un multiple de 7 . On a $p = 7k$; avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} p = n + 5 &\Rightarrow n = p - 5 \\ &\Rightarrow n = 7k - 5 \\ &\Rightarrow n \equiv -5[7] \\ &\Rightarrow n \equiv 2[7]. \end{aligned}$$

D'où si p est un multiple de 7 alors $n \equiv 2[7]$.

« \Leftarrow »

Supposons que $n \equiv 2[7]$.

$$n \equiv 2[7] \Rightarrow \text{il existe un entier } m \text{ tel que } n = 7m + 2.$$

D'autre part $p = n + 5 = 7m + 2 + 5 = 7(m + 1)$. D'où p est un multiple de 7 .

Ainsi p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

2) Montrons que $d = 7$ si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

« \Rightarrow »

Supposons que $d = 7$.

$d = 7$, donc p est un multiple de 7 et d'après 1)c) on peut conclure que $n \equiv 2[7]$.

« \Leftarrow »

Supposons que $n \equiv 2[7]$.

D'après 1)c), on peut conclure que p est un multiple de 7, et d'après 1)b) on déduit que q est aussi un multiple de 7. On a 7 divise p et q , donc 7 divise leur PGCD d . Or on sait que $d = 1$ ou $d = 7$, d'où $d = 7$.

3)a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } 6 &\equiv (-1)[7] \Rightarrow 6^{2014} \equiv (-1)^{2014} [7] \\ &\Rightarrow 6^{2014} \equiv 1[7] \end{aligned}$$

$$7 \equiv 0[7] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 0[7]$$

$$\text{D'où } n = 6^{2014} + 7^{2015} \equiv 1[7].$$

Par conséquent $d \neq 7$, donc $d = 1$.

b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

$$\text{On a } 6^{2014} \equiv 1[7]$$

$$8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^{2015} \equiv 1[7]$$

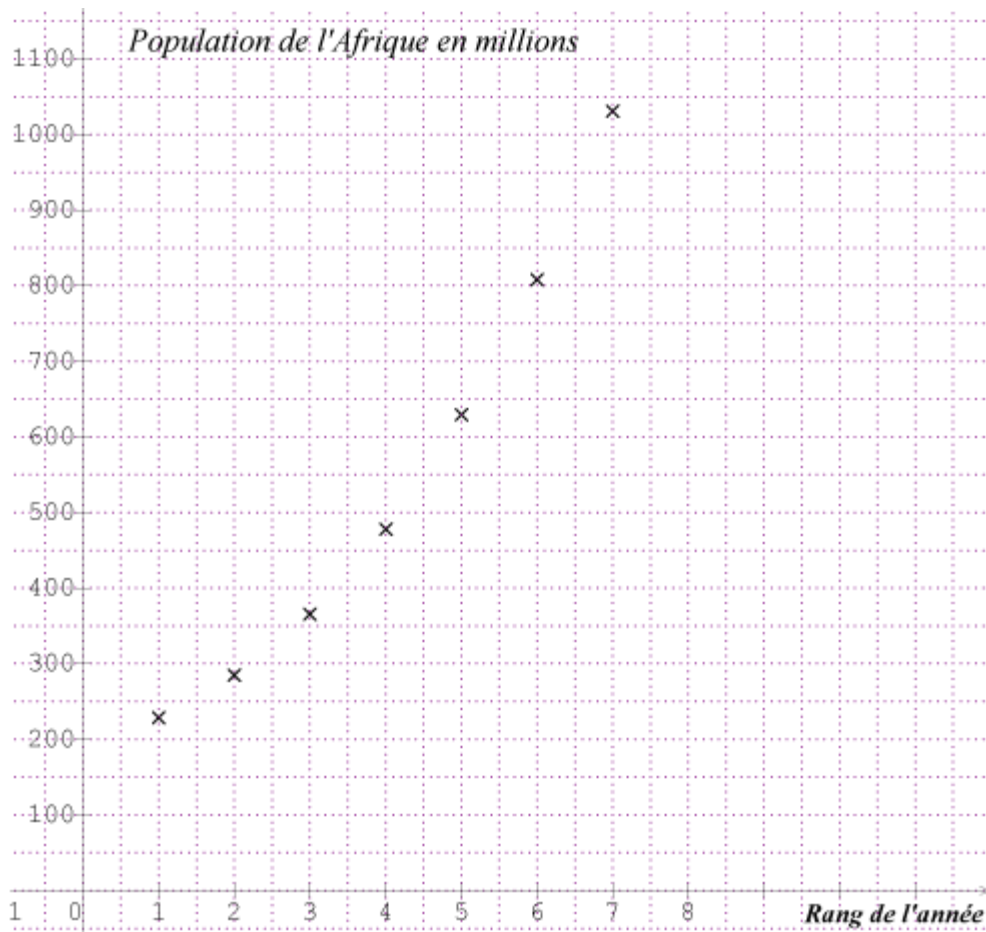
$$\text{D'où } n = 6^{2014} + 8^{2015} \equiv 2[7]. \text{ Par conséquent } d = 7.$$

Exercice 4

Le tableau suivant donne, en millions, l'évolution de la population d'Afrique depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population y_i	229	285	366	478	630	808	1031

1) Le nuage des points (x_i, y_i) .



2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (X, Y), pour cela on note $Z = \ln(Y)$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	229	285	366	478	630	808	1031
$z_i = \ln y_i$	5,43	5,65	5,90	6,17	6,45	6,69	6,94

a) $r \approx 0,9996$.

b) Une équation de la droite de régression de z en x est : $z = 0,26 x + 5,15$.

3)a) $z = 0,26 x + 5,15 \Leftrightarrow \ln y = 0,26 x + 5,15$

$$\Leftrightarrow y = e^{0,26 x + 5,15}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{5,15} e^{0,26 x} = 172,43 e^{0,26 x}.$$

b) On suppose que la situation se poursuit selon le même modèle.

2030 est de rang 9. Donc la population de l'Afrique en 2030 est estimée à :

$$172,43 e^{0,26 \times 9} \approx 1790 \text{ millions.}$$