

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse :

1) L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

3) La limite de la suite u définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ est égale à 1.

4) La suite v définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, est convergente.

Exercice 2 (6 points)

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement les résultats

obtenus. (On remarquera que pour tout réel x , $f(x) = e^x(e^x - 2)$)

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.

c) Etudier les variations de f .

2) a) Déterminer le point d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.

b) Construire la courbe (\mathcal{C}) .

3) a) Soit a un réel strictement négatif. Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , les axes du repère et la droite d'équation $x = a$.

b) Calculer $\lim_{a \rightarrow -\infty} \mathcal{A}$.

4) Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire dans le même repère la courbe (\mathcal{C}') de la fonction g^{-1} réciproque de g .

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x - 1)^2 - 1$.

Exprimer, pour $x \in J$, $g^{-1}(x)$ en fonction de x .

Exercice 3 (5 points)

Soit n un entier naturel, on considère les entiers $p = n + 5$ et $q = 2n + 3$ et on note $d = \text{PGCD}(p, q)$.

- 1) a) Calculer $2p - q$. En déduire les valeurs possibles de d .
b) Montrer que si p est un multiple de 7 alors q est un multiple de 7.
c) Montrer que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.
- 2) Montrer que $d = 7$ si et seulement si $n \equiv 2[7]$.
- 3) Application : Déterminer d dans chacun des cas suivants,
a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.
b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

Exercice 4 (5 points)

Le tableau suivant donne (en Millions) l'évolution de la population de l'Afrique depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population y_i	229	285	366	478	630	808	1031

(Source: ONU 2012)

- 1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$.
(On prendra pour unités graphiques: 1cm pour chaque rang sur l'axe des abscisses et 1cm pour 100 millions d'habitants sur l'axe des ordonnées).
- 2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (X, Y) , pour cela on pose $Z = \ln(Y)$.

Le tableau suivant donne les valeurs de z arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	229	285	366	478	630	808	1031
$z_i = \ln y_i$	5,43	5,65	5,90	6,17	6,45	6,69	6,94

- a) Donner l'arrondi à 10^{-4} près du coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Z) .
En déduire qu'un ajustement affine de la série (X, Z) est justifié.
- b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x .
(Les coefficients seront arrondis au centième).
- 3) a) Etablir la relation $y = 172,43 e^{0,26x}$.
b) On suppose que la situation se poursuit selon le même modèle.
Estimer, à l'aide de cet ajustement, la population de l'Afrique (en millions) en 2030.