

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

$$\begin{aligned}
1) a) (z+1)^2 &= (2+i)^2 \Leftrightarrow (z+1)^2 - (2+i)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow ((z+1)+(2+i))((z+1)-(2+i)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z+3+i)(z-1-i) = 0 \\
&\Leftrightarrow z+3+i = 0 \text{ ou } z-1-i = 0 \\
&\Leftrightarrow z = -3-i \text{ ou } z = 1+i
\end{aligned}$$

$$S_C = \{-3-i, 1+i\}.$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(z-2i)[(z+1)^2 - (2+i)^2] &= (z-2i)[(z+1)^2 - (2+i)^2] \\
&= (z-2i)[z^2 + 2z + 1 - (4 + 4i - 1)] \\
&= (z-2i)[z^2 + 2z - (2 + 4i)] \\
&= z^3 + 2z^2 - (2 + 4i)z - 2iz^2 - 4iz + 2i(2 + 4i) \\
&= z^3 + 2(1-i)z^2 - 2(1+4i)z + 4(-2+i).
\end{aligned}$$

$$c) (E): z^3 + 2(1-i)z^2 - 2(1+4i)z + 4(-2+i) = 0$$

$$\begin{aligned}
z^3 + 2(1-i)z^2 - 2(1+4i)z + 4(-2+i) = 0 &\Leftrightarrow (z-2i)[(z+1)^2 - (2+i)^2] = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-2i) = 0 \text{ ou } (z+1)^2 - (2+i)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -3-i \text{ ou } z = 1+i.
\end{aligned}$$

$$D'où S_C = \{2i, -3-i, 1+i\}.$$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 1+i$ et $z_C = -3-i$.

a) Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre $[BC]$. Le centre I du cercle \mathcal{C} est le milieu du segment $[BC]$.

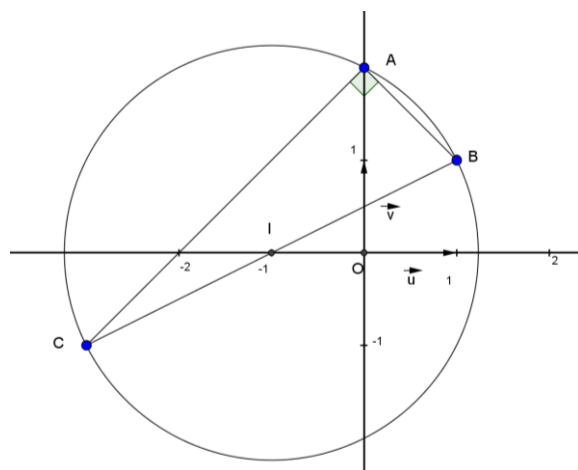
$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1+i+(-3-i)}{2} = -1 ; IB = |z_B - z_I| = |1+i - (-1)| = |2+i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

D'où \mathcal{C} est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

$$b) IA = |z_A - z_I| = |2i - (-1)| = |1+2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}. D'où A \in \mathcal{C}.$$

c) Le point A appartient au cercle \mathcal{C} de diamètre $[BC]$, d'où $\angle BAC$ est un angle droit, donc $\triangle ABC$ est un triangle rectangle en A.

d)



Exercice 2

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) $u_1 = \frac{1}{u_0} + \frac{u_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{1}{u_1} + \frac{u_1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$; $u_3 = \frac{1}{u_2} + \frac{u_2}{2} = \frac{12}{17} + \frac{17}{24} = \frac{577}{408}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2} - \sqrt{2} = \frac{2 + u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{2}$.

- $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que l'inégalité est vraie pour n , c'est-à-dire que $u_n \geq \sqrt{2}$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$. On a $u_n \geq \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0, \text{ car } u_n > 0. \text{ D'où } u_{n+1} \geq \sqrt{2}.$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2} - u_n = \frac{2 + u_n^2 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{2} - u_n)(\sqrt{2} + u_n)}{2u_n}$.

On a $u_n \geq \sqrt{2}$, d'où $\sqrt{2} - u_n \leq 0$ et $\sqrt{2} + u_n > 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.

D'où la suite (u_n) est décroissante.

e) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$. D'où la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. Soit l sa limite. On a $l > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et la suite (u_n) converge vers l .

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, en particulier f est continue en l .

Par suite $f(l) = l$.

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow \frac{1}{l} + \frac{l}{2} = l \\ &\Leftrightarrow \frac{2+l^2}{2l} - l = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2+l^2-2l^2}{2l} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2-l^2}{2l} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2-l^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow l = \sqrt{2}, \text{ car } l > 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite converge vers $\sqrt{2}$.

3) A l'aide de la calculatrice $u_3 \approx 1,4142156$ et $\sqrt{2} \approx 1,4142135$. D'où $0 < u_3 - \sqrt{2} < 10^{-5}$.

Ainsi u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + (1-2x)\ln x$. (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 2 cm).

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (1-2x)\ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln x - 2(x \ln x) = -\infty$, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (1-2x)\ln x$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1-2x}{x} \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \ln x \right) \\ &= -\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \ln x \right) = -\infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1-2x}{x} \ln x \right) = -\infty.$$

c) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, d'où la courbe (\mathcal{C}) admet une asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, d'où la courbe (\mathcal{C}) de f admet une branche parabolique de direction l'axe (O, \vec{i}) .

2)a) $f(x) = x + (1-2x)\ln x, x \in]0, +\infty[.$

$$f'(x) = 1 - 2\ln x + (1-2x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 - 2\ln x = \frac{1-x}{x} - 2\ln x, x \in]0, +\infty[$$

b) $f'(x) = \frac{1-x}{x} - 2\ln x, x \in]0, +\infty[; f'(1) = \frac{1-1}{1} - 2\ln 1 = 0.$

c) Soit $x \in]0, 1[.$

On a $x > 0, 1-x > 0$ et $\ln x < 0$, d'où $\frac{1-x}{x} > 0$ et $-2\ln x > 0$ et par conséquent $\frac{1-x}{x} - 2\ln x > 0.$

Par suite $f'(x) > 0$, pour tout $x \in]0, 1[.$

d) Soit $x \in]1, +\infty[.$

On a $x > 1, 1-x < 0$ et $\ln x > 0$, d'où $\frac{1-x}{x} < 0$ et $-2\ln x < 0$ et par conséquent $\frac{1-x}{x} - 2\ln x < 0.$

Par suite $f'(x) < 0$, pour tout $x \in]1, +\infty[.$

e) Le tableau de variation de la fonction $f.$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	1	$-\infty$

3)a) Pour étudier la position de la courbe par rapport à la droite $\Delta : y = x.$

$$f(x) - x = (1-2x)\ln x, x \in]0, +\infty[.$$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (1-2x)\ln x = 0$$

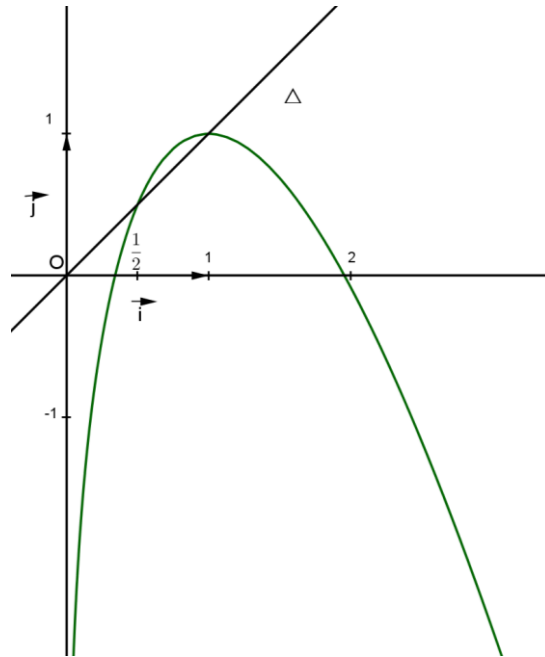
$$\Leftrightarrow 1-2x = 0 \text{ ou } \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
Position de (C) par rapport à Δ	(C) est au-dessous de Δ	(C) est au-dessus de Δ	(C) est au-dessous de Δ	

b) $f(2) = 2 - 3\ln 2.$

La courbe (C) :



4) \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, la courbe (\mathcal{C}) et la droite Δ .

a) $F(x) = (x^2 - x)(1 - \ln x)$, $x \in]0, +\infty[$. F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^2 - x)'(1 - \ln x) + (x^2 - x)(1 - \ln x)' ; x \in]0, +\infty[\\ &= (2x - 1)(1 - \ln x) - (x^2 - x) \frac{1}{x} \\ &= (2x - 1) + (1 - 2x) \ln x - x + 1 \\ &= x + (1 - 2x) \ln x = f(x). \end{aligned}$$

$F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, d'où F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - x) dx = \left[F(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = F(1) - \frac{1}{2} - \left(F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)(1 + \ln 2) - \frac{1}{8} \right) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{8} \text{ unité d'aire} = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Exercice 4

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $5x + 3y = 60$.

a) $5 \times 2 + 3 \times (-3) = 10 - 9 = 1$. D'où $(2, -3)$ est une solution de l'équation (E') : $5x + 3y = 1$.

Par conséquent $(120, -180)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) $(120, -180)$ est une solution particulière de l'équation (E), d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{(-3k + 120, 5k - 180) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Les couples d'entiers naturels non nuls solutions de l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{N}^* \text{ et } y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} -3k + 120 > 0 \\ 5k - 180 > 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 40 \\ k > 36 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 37 \text{ ou } k = 38 \text{ ou } k = 39.$$

D'où $(x, y) \in \{(9, 5); (6, 10); (3, 5)\}$.

2) x est le nombre d'ordinateurs et y est le nombre d'imprimantes. Le prix d'un ordinateur est de 500 dinars et le prix d'une imprimante est de 300 dinars. On a $x > y$.

Le montant total consacré aux achats est de 6000 dinars.

a) On a : $500x + 300y = 6000$ et $x > y$.

$$500x + 300y = 6000 \Leftrightarrow 5x + 3y = 60.$$

b) Le couple (x, y) d'entiers naturels non nuls cherché est une solution de l'équation (E) et tel que $x > y$. D'où $(x, y) = (9, 5)$.

Ainsi le directeur peut acheter 9 ordinateurs et 5 imprimantes.