Section : informatique matière : mathématiques session contrôle 2019

Exercice 1 :

1) a) on a : $(4\text{-}3i)^2$ = 42 – 2x4x3i + (3i)2 = 16 -24i – 9 = 7 - 24i

et $(-4+3i)^2$ = (-4)2 + 2x(-4)x3i + (3i)2 = 16 -24i – 9 = 7 - 24 et comme un nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées alors les racines carrées de 7 – 24i sont 4 – 3i et – 4 + 3i.

b) $\Delta = (2-5i)^2 - 4(-7+i) = 4 - 20i - 25 + 28 - 4i = 7 - 24i = (4-3i)^2$

Donc $z' = \dfrac{-2+5i-4+3i}{2} = -3+4i$ et $z'' = \dfrac{-2+5i+4-3i}{2} = 1+i$ d'où

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i, -3+4i\}$

2a) $\overline{z_1}z_3 = (1-i)(\alpha - i\alpha) = \alpha - i\alpha - i\alpha - \alpha = -2i\alpha$ avec $\alpha \in IR^*$

$\overline{z_1}z_3 = (\overline{z_A - z_o})(z_M - z_O)$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et parsuite le triangle AOM est rectangle en O.

b)

$(\overline{z_1 - z_2})(z_1 - z_3) = \left[\overline{1+i-(-3+4i)}\right]\left[1+i-(\alpha - i\alpha)\right] = (4+3i)\left[(1-\alpha)+i(1+\alpha)\right]$
$= 4(1-\alpha) + 4i(1+\alpha) + 3i(1-\alpha) - 3(1+\alpha) = 4 - 4\alpha + 4i + 4i\alpha + 3i - 3i\alpha - 3 - 3\alpha$
$= 1 - 7\alpha + i(\alpha + 7)$

c) on a : $(\overline{z_1 - z_2})(z_1 - z_3) = (\overline{z_A - z_B})(z_A - z_M)$

A, B et M sont alignés sigles vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

sig $(\overline{z_1 - z_2})(z_1 - z_3) \in IR$ sig $\alpha + 7 = 0$ sig $\alpha = -7$

Exercice 2 :

1) $5^5 = 3125 = 11 \times 284 + 1$ donc $5^5 \equiv 1[11]$ ou bien $\left.\begin{array}{l} 5^2 \equiv 25 \equiv 3[11] \\ 5^3 \equiv 125 \equiv 4[11] \end{array}\right\}$ donc $5^5 \equiv 12[11]$

d'où $5^5 \equiv 1[11]$ on a :

$2019 = 5 \times 403 + 4$ donc $5^{2019} = \left(5^5\right)^{403} \times 5^4$

On a : $\left.\begin{array}{l} 5^4 = 625 \equiv 9[11] \\ (5^5)^{403} \equiv 1[11] \end{array}\right\}$ donc $5^{2019} \equiv 9[11]$

2) a) $5 \times 1 - 3(-2) = 5 + 6 = 11$ d'où $(1, -2)$ est solution de (E).

b) On a 5x - 3y =11 éq $5x - 3y = 5 \times 1 - 3(-2)$ éq $5(x-1) = 3(y+2)$ $(**)$ donc 5 divise $3(y+2)$ or $5 \wedge 3 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss 5 divise $(y+2)$

par suite $y + 2 = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $y = 5k - 2$; $(k \in \mathbb{Z})$

d'après$(**)$: $5(x-1) = 3(5k)$ donc $x = 3k + 1$; $(k \in \mathbb{Z})$

Réciproquement, pour

$x = 3k+1$ et $y = 5k-2$, on a $5(3k+1)-3(5k-2) = 5+6 = 11$

D'où $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k+1\ ,\ 5k-2)\ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Ou bien directement</u> : comme (1,-2) est solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k+1\ ,\ 5k-2)\ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

3) d = pgcd(a,b) donc (d divise a) et (d divise b)
   par suite d divise $(5a-3b)$ d'où d divise 11
   or d > 0, donc d = 1 ou d = 11.

4) a) on a :

$16 \equiv 5[11]$ donc $16^{2019} \equiv 5^{2019}[11]$ comme $5^{2019} \equiv 9[11]$

alors $16^{2019} \equiv 9[11]$ d'où $3\times 16^{2019}+1 \equiv 28[11]$

par suite $3\times 16^{2019}+1 \equiv 6[11]$

Et comme 0≤6≤10 alors, 6 est le reste de la division euclidienne de n par 11.

b) on vérifie que $(3\times 16^{2019}+1; 5\times 16^{2019}-2)$ est une solution de (E)

d'après 3), pgcd $(3\times 16^{2019}+1; 5\times 16^{2019}-2)$ = 1 ou pgcd $(3\times 16^{2019}+1; 5\times 16^{2019}-2)$ =11

or 11 ne divise pas $(3\times 16^{2019}+1)$ et c'est d'après 4)a) donc pgcd(a, b) = 1.

<u>Exercice 3 :</u>

1) a) $g(1) = 1e^0 - 1 = 1-1 = 0$

b)

X	-∞		1		+∞
g(x)		-	0	+	

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} - x$

On pose $X = x-1$ donc $x = X+1$ et comme $x \to -\infty$ alors $X \to -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X - X - 1 = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} - x - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ avec X= x-1 donc la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) au $V(-\infty)$

c) $f(x)-(-x) = (x-1)e^{x-1}$ est du signe de $(x-1)$

ainsi : sur $]-\infty,1[$, (C) est au dessous de Δ

sur $]1,+\infty[$, (C) est au dessus de Δ

(C) rencontre Δ au point de coordonnées (1,-1)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{x-1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x-1} - \dfrac{x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x-1} - \dfrac{x-1+1}{x-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x-1} - 1 - \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)e^{x-1} - x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} e^{x-1} - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\dfrac{1}{x})e^{x-1} - 1 = +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au $V(+\infty)$

4) a) pour tou $x \in IR$, $f'(x) = e^{x-1} + (x-1)e^{x-1} - 1 = e^{x-1} + xe^{x-1} - e^{x-1} - 1 = xe^{x-1} - 1 = g(x)$

b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c) * f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ donc elle réalise unebijection de $]-\infty,1]$ sur $f(]-\infty,1]) = [-1,+\infty[$

or $0 \in [-1,+\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

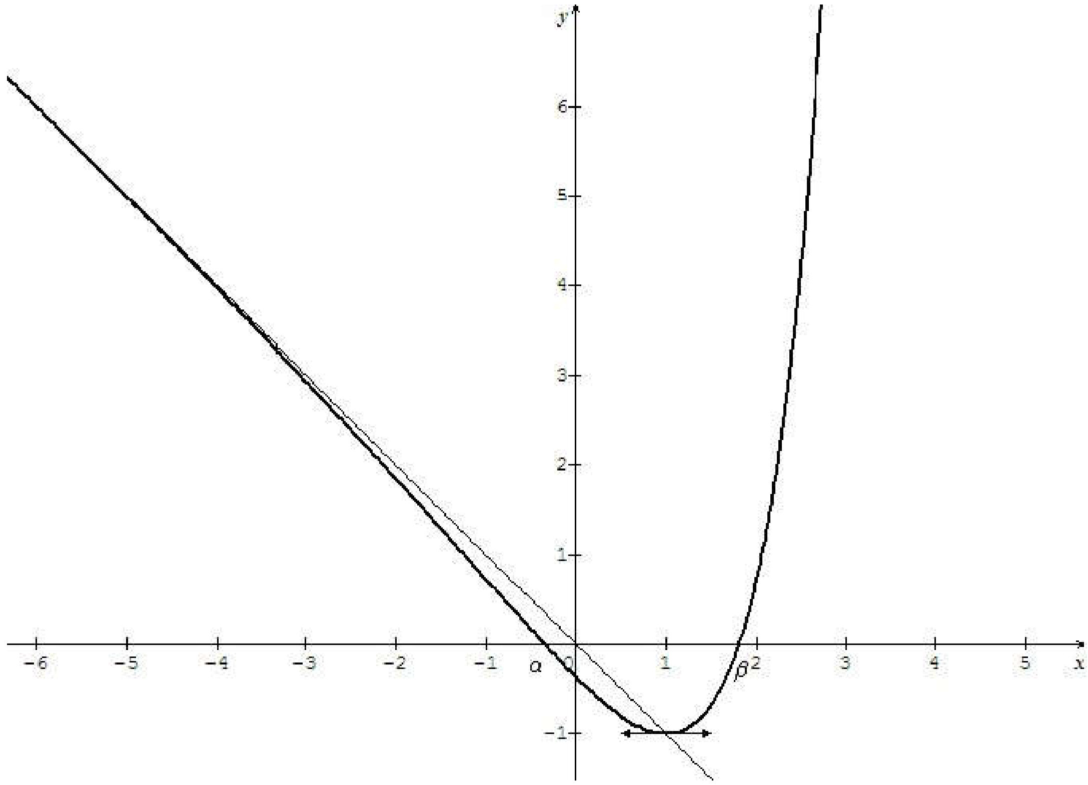
* f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle realise unebijection de de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [-1,+\infty[$

or $0 \in [-1,+\infty[$ donc il existe un unique réel $\beta \in [1,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$

d) $f(-0,4) \times f(-0,3) = 0,055 \times (-0,054) < 0$ donc $\alpha \in]-0,4;-0,3[$

$f(1,8) \times f(1,9) = -0,019 \times 0,313 < 0$ donc $\beta \in]1,8;1,9[$

5)



5) a) $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-1}\left|f(x)-(-x)\right|dx=\int_{-1}^{\lambda}(x-1)e^{x-1}dx$ car (C) est au dessus de Δ sur $\left]-\infty,1\right]$

On pose $u(x)=x-1$ $\quad u'(x)=1$

$v'(x)=e^{x-1}$ $\quad v(x)=e^{x-1}$

Les fonctions précédentes sont continues sur [, -1]

$A(\lambda)=\left[(x-1)e^{x-1}\right]_{-1}^{\lambda}-\int_{-1}^{\lambda}e^{x-1}dx=\left[(x-1)e^{x-1}\right]_{-1}^{\lambda}-\left[e^{x-1}\right]_{-1}^{\lambda}=(\lambda-2)e^{\lambda-1}+3e^{-2}$ (ua)

b) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\lambda-2)e^{\lambda-1}+3e^{-2}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\underbrace{(\lambda-1)e^{\lambda-1}}_{\searrow 0}-\underbrace{e^{\lambda-1}}_{\searrow 0}+3e^{-2}=3e^{-2}$ (ua)

<u>Exercice 4 :</u>

1) a) A l'aide de la calculatrice on obtient : $r=0,9839$

b) $\Delta : x=20,9\,t-41946,9$

c) Pour $t_i=2020$ on obtient $x_i=271,1\simeq 271$ abonnés.

2) a) $r=0,9541$

b) r > 0,75 donc on a une forte correlation entre x et z et l'ajustement affine est justifié.

c) $\Delta' : z=0,012\ x+3,106$

d) $z=\ln(y)=0,012\,x+3,106$ donc $y=e^{0,012x+3,106}=e^{3,106}e^{0,012x}$

On pose $A=e^{3,106}=22.332$ et $B=0,012$

3) Pour t = 2020 on a $x=271$ et $y\simeq 277,1\ Gb/S$.