

Exercice 1 :

De quoi s'agit t-il ?

* **suites réelles, convergence**

* **suites géométriques, terme général**

1) a) * $n = 0$, $0 < u_0 = \frac{1}{3} < 1$ donc $P(0)$ est vraie.

* Supposons que pour n entier naturel donné, $P(n)$ est vraie (c'est à dire $0 < u_n < 1$)

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie (c'est à dire $0 < u_{n+1} < 1$)

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} = \frac{2(u_n+1)-2}{1+u_n} = 2 - \frac{2}{1+u_n}$$

$$\text{On a : } 0 < u_n < 1 \Rightarrow 1 < 1 + u_n < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + u_n} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} = 2 - \frac{2}{1 + u_n} < 1$$

Donc l'implication $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < 1$.

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+u_n} - u_n = u_n \left(\frac{2}{1+u_n} - 1 \right) = \frac{u_n}{1+u_n} (2 - 1 - u_n) = \frac{u_n}{1+u_n} (1 - u_n) > 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

c) (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

$$\text{2) a) } v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{1+u_n}}{1-\frac{2u_n}{1+u_n}} = \frac{2u_n}{1+u_n-2u_n} = \frac{2u_n}{1-u_n} = 2v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

$$\text{b) } v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \text{ puis } v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$$

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \text{ sig } u_n = \frac{v_n}{1+v_n} = \frac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2^{n-1}} + 1} = 1.$$

Exercice 2 :

De quoi s'agit t-il ?

* Calcul de probabilités d'évènements

* Probabilité conditionnelle, probabilité totale

* Loi binomiale

$$1) P(P) = 0,85 \quad , \quad P(A) = 0,78 \quad \text{et} \quad P(P \cap A) = 0,75$$

$$2) P(A_1) = P(A/P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{15}{17}$$

$$P(A_2) = P(\bar{P} \cap A) = P(A) - P(P \cap A) = 0,78 - 0,75 = 0,03$$

$$3) n = 6 \quad \text{et} \quad p = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,22$$

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois qu'il arrive en retard

X suit la loi binomiale de paramètres (n, p).

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_6^0 \times 0,22^0 \times 0,78^6 + C_6^1 \times 0,22^1 \times 0,78^5 \approx 0,606$$

Exercice 3 :

De quoi s'agit t-il ?

* fonction en exponentielle

* Suite définie par une intégrale : Convergence et encadrement de la limite

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{e^x} = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

b) f est définie et continue sur et $[0, +\infty[$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x}(-e^{-x}) = \left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right) e^{-x}$

$$f'(x) = 0 \text{ sig } 1 - 2x = 0$$

$$\text{sig } x = \frac{1}{2}$$

* si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $f'(x) > 0$

* si $x > \frac{1}{2}$ alors $f'(x) < 0$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} e^x} = +\infty$$

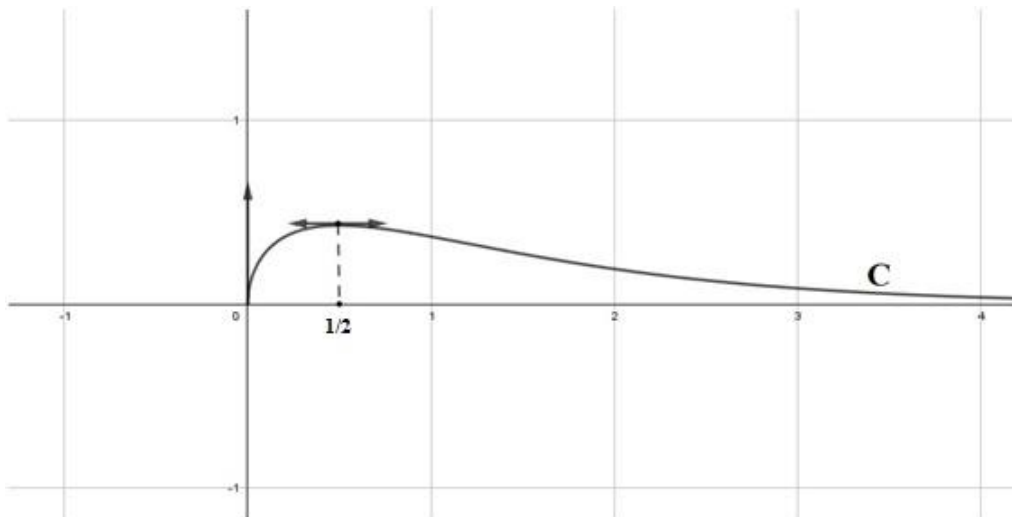
Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et \mathcal{C} admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

2) a) Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	○	-	
$f(x)$	0	↗ $f\left(\frac{1}{2}\right)$		↘ 0	

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,43$$

b) Représentation graphique :



3) a) $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(t)dt - \int_0^n f(t)dt = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$ car $n + 1 > n$ et f positive sur $[0, +\infty[$.

donc (u_n) est croissante.

b) $t \geq 0, (t + 2)^2 - 8t = t^2 + 4t + 4 - 8t = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 \geq 0$

sig $8t \leq (t + 2)^2$

sig $\sqrt{8t} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{t} \leq t + 2$

sig $\sqrt{t} \leq \frac{t+2}{2\sqrt{2}}$

c) On pose : $u(t) = t + 2 \rightarrow u'(t) = 1$ (Intégration par parties)

$v'(t) = e^{-t} \rightarrow v(t) = -e^{-t}$

$\int_0^n (t + 2) e^{-t} dt = [-(t + 2) e^{-t}]_0^n - \int_0^n -e^{-t} dt = [-(t + 2) e^{-t}]_0^n + [-e^{-t}]_0^n = 3 - (n + 3) e^{-n}$

d) $u_n = \int_0^n f(t)dt = \int_0^n \sqrt{t} e^{-t} dt \leq \int_0^n \frac{(t+2)}{2\sqrt{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^n (t + 2) e^{-t} dt = \frac{3 - (n+3) e^{-n}}{2\sqrt{2}} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$

donc (u_n) est majorée.

(u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

Exercice 4 :

De quoi s'agit t-il ?

* Arithmétique : Résolution d'équations dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

* PGCD et PPCM

* Congruences

1) a) $(E_1) : 5x - 7y = 3$, $5 \times 2 - 7 \times 1 = 10 - 7 = 3$

Donc $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est une solution de (E_1) .

b) $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est une solution particulière de (E_1) .

$$5x - 7y = 3 \quad (1)$$

$$5x_0 - 7y_0 = 3 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 5(x - x_0) = 7(y - y_0)$$

$$\Rightarrow 7 \mid 5(x - x_0)$$

$7 \mid 5(x - x_0)$ et $\text{PGCD}(7, 5) = 1$ d'où d'après le lemme de Gauss $7 \mid x - x_0$

$$\Rightarrow x - x_0 = 7k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = x_0 + 7k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

d'autre part $5(x - x_0) = 7(y - y_0) \Rightarrow 5 \times 7k = 7(y - y_0)$

$$\Rightarrow 5 \times k = y - y_0$$

$$\Rightarrow y = y_0 + 5k$$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2 + 7k, 1 + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) (a, b) solution de (E_1) sig $5a - 7b = 3$.

On pose $d = a \wedge b \Rightarrow d \mid a$ et $d \mid b$

$$\Rightarrow d \mid 5a - 7b = 3$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ ou } d = 3$$

d) $d = 1$, $(2, 1)$ solution de (E_1) avec $2 \wedge 1 = 1$

$d = 3$, $(9, 6)$ solution de (E_1) avec $9 \wedge 6 = 3$

2) a) $(E_2) : 5x^2 - 7y^2 = 3$

On pose $x = 3k$ et $y = 3k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

donc $5x^2 - 7y^2 = 9(5k^2 - 7k'^2) = 3$ implique $9 \mid 3$ impossible.

b) (x, y) est solution de (E_2) sig $5x^2 - 7y^2 = 3$

or $5 \equiv 2 [3]$ et $7 \equiv 1 [3]$ donc $5x^2 - 7y^2 \equiv 3 [3] \Rightarrow 2x^2 \equiv y^2 [3]$

c) si $z \equiv 1 [3]$ alors $z^2 \equiv 1 [3]$

si $z \equiv 2 [3]$ alors $z^2 \equiv 1 [3]$

d) (x, y) est solution de $(E_2) \Rightarrow x$ et y ne sont pas des multiples de 3.

$\Rightarrow x \equiv 1$ ou $2 [3]$ et $y \equiv 1$ ou $2 [3]$

$\Rightarrow 2x^2 \not\equiv y^2 [3]$

Donc (E_2) n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.