| REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION | SESSION PRINCIPALE | EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009 |
|---|---|---|
| SECTION : MATHEMATIQUES | | |
| EPREUVE : MATHEMATIQUES | DURÉE : 4 Heures | COEFFICIENT : 4 |

## Exercice 1 (3 points)

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.*
*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.*

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $1+i\sqrt{3}$.

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3}+i$ b) $\sqrt{3}-i$ c) $-\sqrt{3}-i$

2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$,

alors $a_n \equiv 0 \pmod 5$ pour

a) tout entier naturel n pair b) tout entier naturel n c) tout entier naturel n impair

4) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions de ce QCM.

La probabilité pour que ses quatre réponses soient toutes exactes est

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^4$

## Exercice 2 (5 points )

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,,\ 1\,[$ par $f(x) = \ln(1-\sqrt{x}\,)$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ .

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Tracer $(\mathscr{C})$. (On précisera la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[\,0\,,\ 1\,[$ sur $]-\infty,\ 0]$ .

(On notera $f^{-1}$ la fonction réciproque de f et $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Tracer $(\Gamma)$. (On précisera la demi-tangente à $(\Gamma)$ en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in\ ]-\infty,\ 0]$ , $f^{-1}(x) = \left(e^{x}-1\right)^{2}$ .

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\Gamma)$ et les droites d'équations

$x = -\ln 2$ ; $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1-\sqrt{x}\,)dx$ .

## Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [ AB ] , [BC ] , [ AC ] et [ JC ] .

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que $f(K) = L$ .

c) Soit H le milieu du segment [ A J ]. Justifier que $f(I) = H$ .

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit $\varphi$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que $\varphi$ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H .

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$ .

d) Déduire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$ , ( où f est la similitude définie dans 2° et $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK) ).

4) Soit $\Delta$ l'axe de la similitude indirecte $\varphi$ .

a) Tracer $\Delta$ .

b) La droite $\Delta$ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q .

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$ .

**Exercice 4 (4 points)**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta , 2\sin\theta)$ , où $\theta$ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.

b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.

2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.

b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [ PQ ].

**Exercice 5 (3 points )**

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, où $f'$ désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.
Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.