MATHS

Section : Maths

$2^{\text{ème}}$ Session

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
3) $f(2) \leq \ln 2$.

Contenu

- *Fonction définie par intégrale.*
- *Signe d'une intégrale.*
- *Comparaison de deux intégrales***.**

Solutions

1. **Vrai.** En effet : $g : x \mapsto \frac{\cos^2 x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$ donc f est la primitive de g sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1. Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$; $f'(x)=\frac{\cos^2 x}{x} \geq 0$.

2. **Faux**. Car pour $0 < x < 1$; $\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}dt \leq 0$.

3. **Vrai**. En effet $\frac{\cos^2 t}{t} \leq \frac{1}{t}$ pour tout $t \in [1,2]$ donc $f(2)=\int_1^2 \frac{\cos^2 t}{t}dt \leq \int_1^2 \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2$.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur]0, + ∞ [par

$f_p(x) = p\,(\ln x) - x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction f_3: $x \mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles]1, 3[et] 3, + ∞ [.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

x	0		p		$+\infty$
$f'_p(x)$		$+$	0	$-$	
f_p	$-\infty$	$\nearrow$	$p(\ln p) - p$	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

1) Déterminer la limite de la suite (v_p).

2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4, C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6.

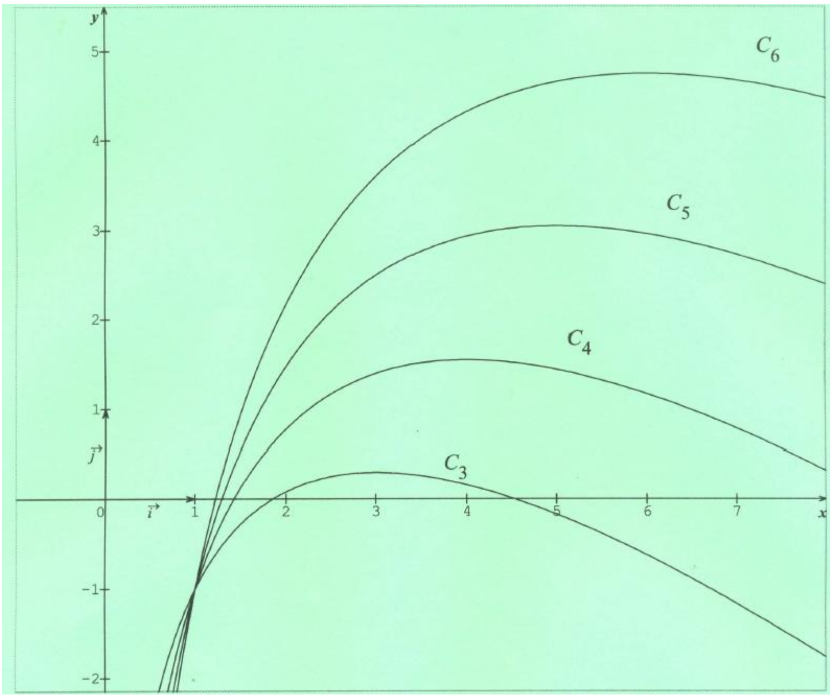
a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3, u_4, u_5 et u_6 de la suite (u_p).

b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.

b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\dfrac{\ln u_p}{u_p} = \dfrac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p).



Contenu

- *Fonction ln*
- *Notion de bijection.*
- *Suites réelles, calcul de limites.*

Aptitudes visées

- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Utiliser les théorèmes des valeurs intermédiaires ou de bijection pour montrer l'existence, l'unicité et encadrer des solutions des équations de type f(x) = 0.*
- *Représenter graphiquement les termes d'une suite récurrente.*
- *Prouver la convergence d'une suite réelle et déterminer sa limite.*

Solutions et commentaires

A.

1) f_3 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f_3'(x)=\frac{3}{x}-1=\frac{3-x}{x}$.

x	0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f_3	||	$-\infty$ ↗	$3\ln 3-3$	↘ $-\infty$	

2) La fonction f_3 est continue et strictement croissante sur $]1,3[$ donc elle réalise une bijection de $]1,3[$ sur $f_3(]1,3[)=]-1,3\ln 3-3[$. $0\in]-1,3\ln 3-3[$ donc il existe un unique $u_3\in]1,3[$ tel que $f_3(u_3)=0$.

La fonction f_3 est continue et strictement décroissante sur $]3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]3,+\infty[$ sur $f_3(]3,+\infty[)=]-\infty,3\ln 3-3[$. $0\in]-\infty,3\ln 3-3[$ donc il existe un unique $v_3\in]3,+\infty[$ tel que $f_3(v_3)=0$.

✓ *Se rappeler le théorème de bijection*

3) Remarquons que pour tout $p>3$, $p\ln p-p=p(\ln p-1)>0$.

a) La fonction f_p est continue et strictement croissante sur $\left]1,p\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]1,p\right[$ sur $f_p\left(\left]1,p\right[\right)=\left]-1,p\ln p-p\right[$. $0\in\left]-1,p\ln p-p\right[$ donc il existe un unique $u_p\in\left]1,p\right[$ tel que $f_p\left(u_p\right)=0$

b) La fonction f_p est continue et strictement décroissante sur $\left]p,+\infty\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]p,+\infty\right[$ sur $f_p\left(\left]p,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,p\ln p-p\right[$. $0\in\left]-\infty,p\ln p-p\right[$ donc il existe un unique $v_p\in\left]p,+\infty\right[$ tel que $f_p\left(v_p\right)=0$.

B.

1) On sait que pour tout $p>3$, $v_p>p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}p=+\infty$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}v_p=+\infty$.

2) a) et b) voir la figure.

3) a) Pour tout $p\geq 3$, $f_p\left(u_{p+1}\right)=p\ln\left(u_{p+1}\right)-u_{p+1}=(p+1)\ln\left(u_{p+1}\right)-u_{p+1}-\ln\left(u_{p+1}\right)$

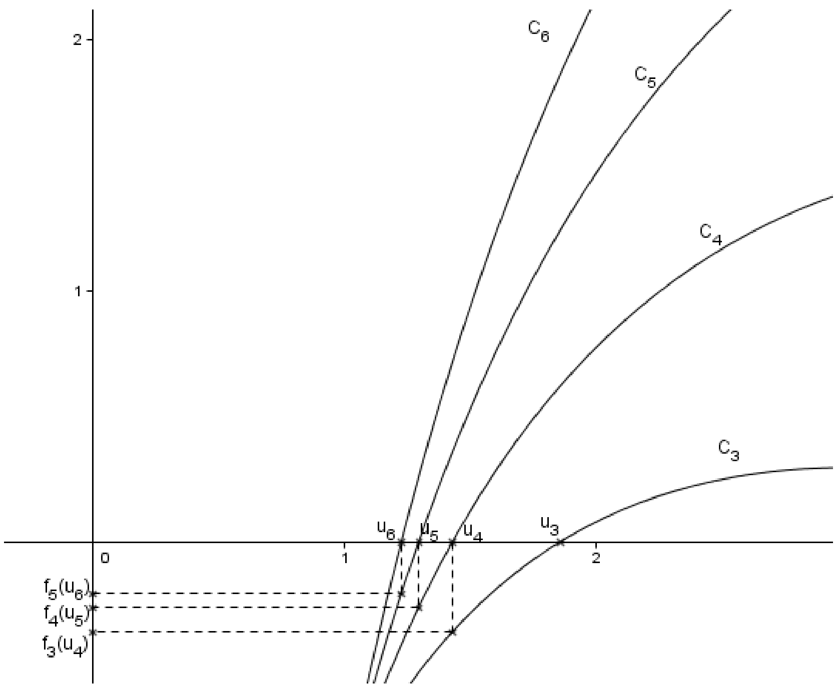
$$=f_{p+1}\left(u_{p+1}\right)-\ln\left(u_{p+1}\right)=-\ln\left(u_{p+1}\right)<0 \text{ car } u_{p+1}>1.$$

b) on a pour tout $p\geq 3$, $f_p\left(u_{p+1}\right)<0=f_p\left(u_p\right)$ et la fonction f_p est strictement croissante sur $\left]1,p\right[$ donc $u_{p+1}<u_p$ par suite la suite $\left(u_p\right)$ est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

c) $f_p\left(u_p\right)=0\Rightarrow p\ln(u_p)-u_p=0\Rightarrow\dfrac{\ln(u_p)}{u_p}=\dfrac{1}{p}$

Posons $\lim\limits_{p\to+\infty}u_p=L$; $L\geq 1$.

$\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{\ln(u_p)}{u_p}=\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{p}=0$, Si $L>1$ alors $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{\ln(u_p)}{u_p}=\dfrac{\ln L}{L}\neq 0$ d'où $L=1$.



EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).

3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ').

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

Contenu

- *Plan passant par trois points non alignés de l'espace.*
- *Sphère : équation d'une sphère , détermination du centre et du rayon d'une sphère, position d'une sphère et d'un plan*
- *Homothétie de l'espace, image d'une sphère , image d'un plan par une homothétie.*

Aptitudes visées

- *Déterminer une équation cartésienne d'un plan.*
- *Déterminer le centre et le rayon d'une sphère connaissant son équation cartésienne.*
- *Déterminer la position d'une sphère et d'un plan.*
- *Reconnaître l'image d'une sphère par une homothétie.*
- *Reconnaître un plan globalement invariant par une homothétie .*

Solutions et commentaires

1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, don $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et par suite une équation du plan (ABC) est $2x - y + z + d = 0$

le point $A \in (ABC)$ donc d = -1. On en déduit que (ABC) : $2x - y + z - 1 = 0$.

- ✓ *On peut traiter autrement cette question : il suffit de vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan P : 2x-y+z-1 = 0 .*

2) a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 14$. On en déduit que S est la sphère de centre $I(3,0,1)$ et de rayon $r = \sqrt{14}$.

b) $d(I,(ABC)) = \sqrt{6} < r$ donc S coupe(ABC) suivant un cercle (Γ) de rayon $r' = \sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$.
Or $A \in S$, $B \in S$ et $AB = 4\sqrt{2} = 2r'$ ce qui prouve que [AB] est un diamètre de (Γ).

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) en A. D'où (AC) est tangente à (Γ) en A.

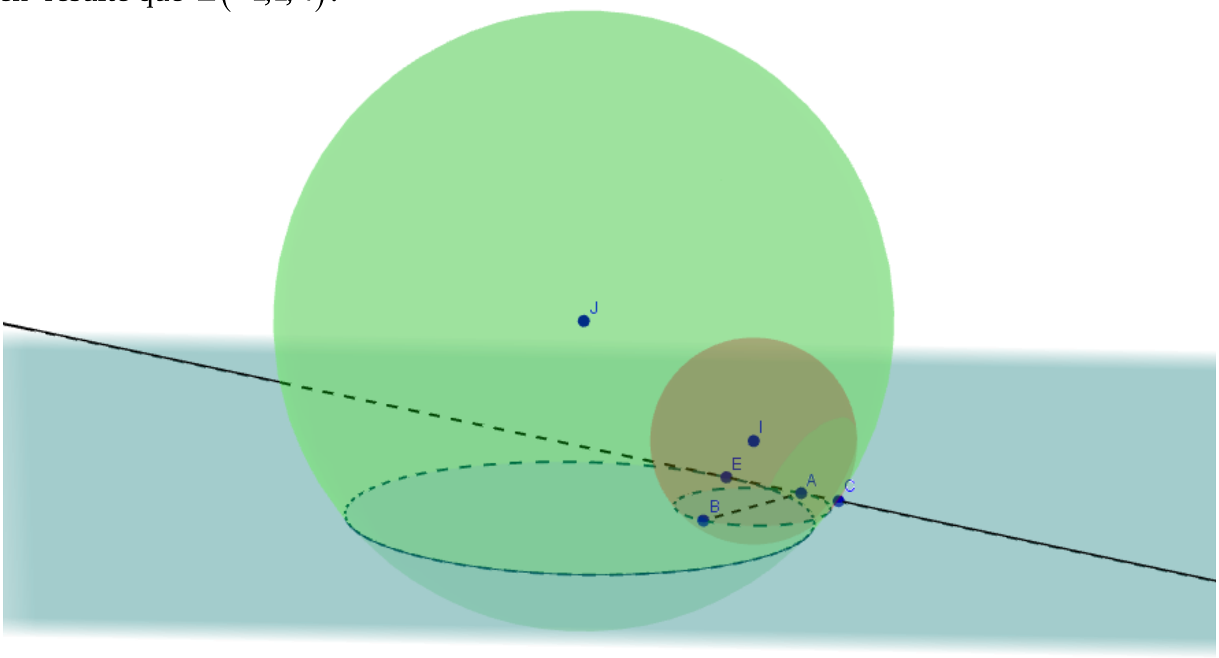
3) a) on pose R' le rayon de S' donc R' = 3 r $= 3\sqrt{14}$ et $J = h(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{CI}$. En posant $J(x,y,z)$, l'égalité vectorielle précédente donne $\begin{cases} x - 2 = 3 \\ y - 4 = -12 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ il résulte que $J(5,-8,1)$.

b) On sait que h(S) = S'. Or $C \in (ABC)$ donc h((ABC)) = (ABC) et puisque S coupe (ABC) suivant le cercle (Γ) donc S' = h(S) coupe (ABC) = h((ABC)) suivant le cercle $\Gamma' = h(\Gamma)$.

c) $C \in (AC)$ donc h((AC)) = (AC) et puisque (AC) est tangente à S en A donc (AC) = h((AC)) est tangente à S' en h(A) = E

h(A) = E $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CA}$. En posant $E(x,y,z)$, l'égalité vectorielle précédente donne $\begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 4 = -1 \\ z - 1 = 1 \end{cases}$

Il en résulte que $E(-1,1,4)$.



EXERCICE 4

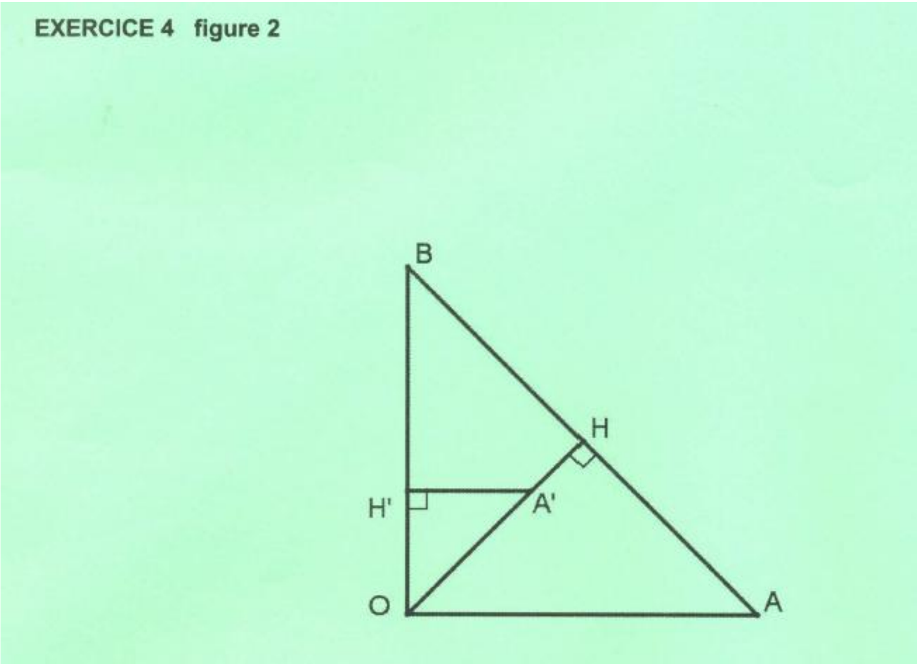
Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que $OA' = \frac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f .
   a) Déterminer la nature du triangle $OA'B'$.
   b) Construire le point B'.
   c) Montrer que $f(H) = H'$.
3) Soit I le milieu du segment $[A'B]$ et J le milieu du segment $[AA']$.
   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.
   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.
   c) Soit K le milieu du segment $[AB']$. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   d) Déterminer alors R(K).
   e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.
4) Montrer que le quadrilatère $IHKH'$ est un carré



Contenu

- *Similitude directe : détermination du centre , du rapport et de l'angle d'une similitude directe, image d'un triangle par une similitude directe.*
- *Déplacement : éléments caractéristique d'une rotation.*
- *Identification d'une configuration de base (carré).*

Aptitudes visées

- *Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe.*
- *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'un déplacement.*
- *Utiliser une similitude ou une isométrie pour déterminer la nature d'une configuration usuelle (triangle rectangle , carré).*

Solutions et commentaires

1) $k = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{\frac{1}{2}OA}{OA} = \dfrac{1}{2}$ et $\theta \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) a) Le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct or f(O) = O, f(A) = A' et f(B) = B' donc le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O et de sens direct (f est une similitude directe).

b) Le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O et de sens direct donc B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrons que H' est le milieu de [A'B']. on sait que

$\left(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OB'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ donc [OB) est la bissectrice de [OA',OB'] et puisque le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O donc (OB) est la médiatrice de [A'B'] par suite (OB) $\perp$ (A'B') et (OB) $\perp$ (A'H') donc les points A', H' et B' sont alignes et H' $\in (OB)$ d'où le point H' est le milieu de [A'B'].

Puisque H est le milieu de [AB] et $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ donc f(H) = H'.

3) a) I est le milieu de [A'B] et J est le milieu de [AA'] donc $IJ = \dfrac{1}{2}AB = AH = OH \neq 0$ donc il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b) $\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HO}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HO}\right)[2\pi] = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc R est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

c) K est le milieu de [AB'] et J est le milieu de [A'A] donc $KJ = \dfrac{1}{2}A'B' = A'H' = OH'$ de plus

$\overrightarrow{JK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ donc $\left(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{OH'}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{A'H'}, \overrightarrow{OH'}\right)[2\pi] = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) On pose R(K) = K' on obtient alors JK = OK' et $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OK'}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ or JK = OH' et $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ on en déduit que OK' = OH' et $\left(\overrightarrow{OH'},\overrightarrow{OK'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OH'},\overrightarrow{JK}\right)+\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OK'}\right)[2\pi]=0[2\pi]$ donc K' = H'. ainsi R(K) = H'.

e) R(K) = H' et R(I) = H donc IK= HH' et (IK) $\perp$ (HH')

4) I est le milieu de [A'B] et H est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

H' est le milieu de [A'B'] et K est le milieu de [AB'] donc $\overrightarrow{H'K}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

Donc $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{H'K}$ par suite IHKH' est un parallélogramme (les points I, H et K ne sont pas alignés) et puisque IK= HH' et (IK) $\perp$ (HH') donc c'est un carré.