

MATHS

Section : Maths

1^{ère} Session

EXERCICE 1

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod{2}$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$.

Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$

Contenu

- *Congruence*.
- *Reste modulo n* .

Solutions et commentaires

a) **Vrai**. En effet : on sait que si x est un entier, alors son reste modulo 2 est soit 0 soit 1 :

Reste de $x \pmod{2}$	0	1
Reste de $x^3 \pmod{2}$	0	1

Il en résulte du tableau ci-dessus que $x^3 \equiv x \pmod{2}$.

✓ On pourrait envisager la justification suivante : $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ est toujours pair, par conséquent $x^3 \equiv x \pmod{2}$

b) **Faux**. Car pour $x = 2$, $2 \equiv 2 \pmod{14}$ et 2 non congru à 1 modulo 7.

c) **Vrai**. En effet : si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $4x \equiv 0 \pmod{5}$ et donc $x \equiv 0 \pmod{5}$; car $4 \wedge 5 = 1$.

✓ Il s'agit d'utiliser le lemme de Gauss : $\begin{cases} ax \equiv 0 \pmod{b} \\ b \text{ ne divise pas } a \end{cases}$ alors $x \equiv 0 \pmod{b}$

d) **Faux**. Car : pour $x = 9$ et $y = 5$, $8 \times 9 - 7 \times 5 = 47$.

EXERCICE 2

I - Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que le point $I \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} \right)$ est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}) .

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (\mathcal{C}) au point I .

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Construire I .

b) Construire la tangente T .

c) Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$.

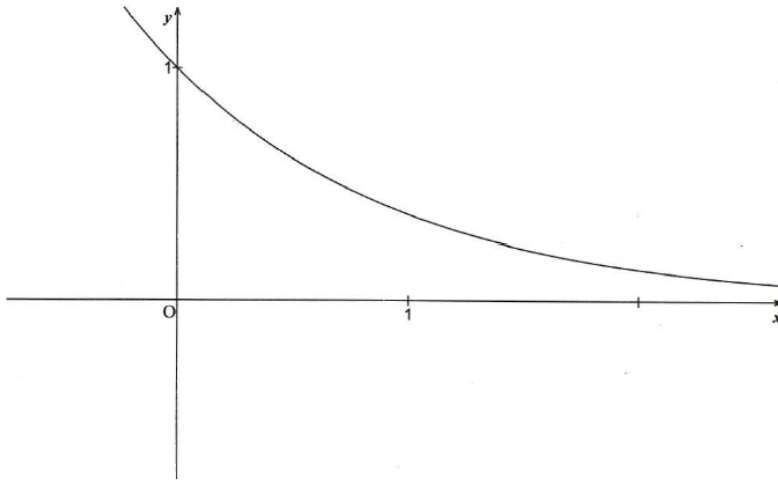
5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 figure1



Contenu

- Continuité- Dérivabilité –calculs de limites.
- Calcul d'intégrales
- Suites d'intégrales, limite d'une suite réelle.

Aptitudes visées :

- Etudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.
- Encadrer une expression algébrique.
- Etudier les variations d'une fonction.
- Reconnaître un point d'inflexion.
- Exploiter un graphique pour construire un point ou une droite dans le plan .
- Tracer la courbe représentative d'une fonction.
- Reconnaître et encadrer une aire.

Solutions et commentaires

I.

1) $g(0) = 1$. Pour tout réel x , $g'(x) = -e^{-x}$ ce qui donne $g'(0) = -1$.

Une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)x + g(0) = -x + 1$.

2) a) Pour tout $x \geq 0$, $-x \leq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$.

Pour tout $x \geq 0$, posons la fonction h définie par $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$ donc h est strictement croissante sur

$[0, +\infty[$. Il en résulte que si $x \geq 0$ alors $h(x) \geq h(0) = 0$. On en déduit que $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout $x \geq 0$.

Ainsi pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

✓ La courbe représentative de la fonction

exponentielle est au dessus de la tangente T_1 au point d'abscisse 0 ($T_1 : y = x+1$) (voir graphique ci-contre).

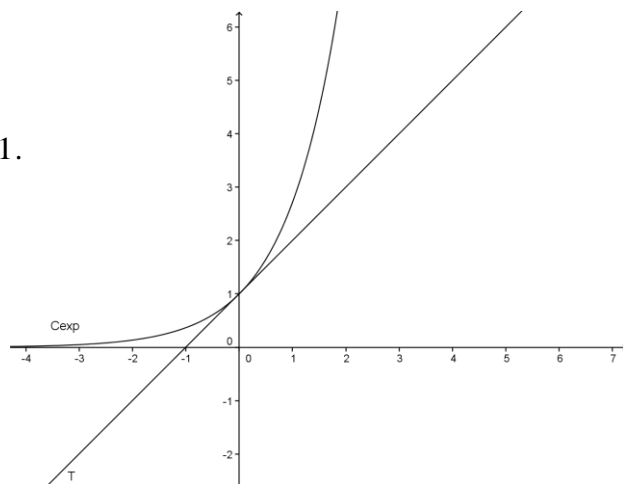
Ainsi pour tout réel x ; $e^x \geq x+1$ et par conséquent $e^{-x} \geq -x+1$.

b) D'après a) $1-t \leq e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0, x]$, $x \geq 0$.

Les fonctions $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues sur $[0, x]$, $x \geq 0$

$$\text{donc } \int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x 1dt$$

$$\text{Donc } \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq [-e^{-t}]_0^x \leq x \text{ d'où } x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x \text{ pour tout } x \geq 0.$$



II.

$$1) \ a) \ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \end{cases} \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

$$b) \ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0 = f'_d(0). \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0.$$

c) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	1

2) a) La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe. Donc le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}).

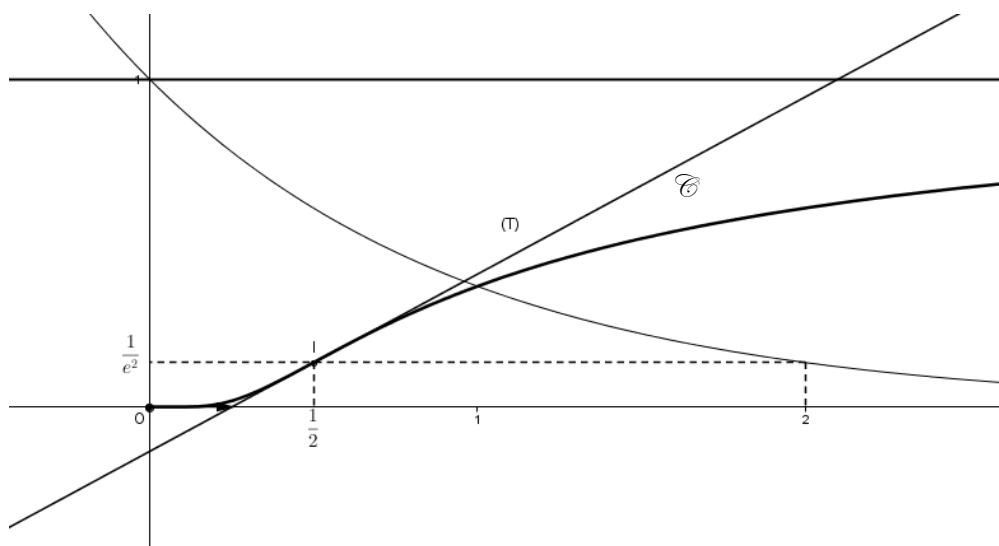
$$b) \ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{e^2} ; T : y = \frac{4}{e^2}x - \frac{3}{e^2}.$$

3) a) Le point I est le point de (Γ) d'abscisse $\frac{1}{2}$

✓ Il s'agit d'exploiter une donnée graphique pour construire un point du plan.

b) La tangente T passe par le point I et de coefficient directeur $\frac{4}{e^2}$; ce coefficient est constructible vu que $\frac{1}{e^2}$.

c) Représentation graphique de f .



$$4)a) A_k = \int_k^{k+1} (1 - f(x)) dx = \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx. \text{ or d'après I 2) on a } x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x \text{ pour tout } x \geq 0,$$

on en déduit que $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \leq 1 - e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$, $x \mapsto 1 - e^{-\frac{1}{x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $[k, k+1]$, $k \geq 1$

$$\text{donc } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} dx \leq \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \text{ d'où } \left[\ln x + \frac{1}{2x} \right]_k^{k+1} \leq A_k \leq [\ln x]_k^{k+1}$$

$$\text{on en déduit que } \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

$$b) \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0.$$

5)a) pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx = \int_1^{n+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$. Ainsi S_n est l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}) , la droite $y = 1$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n+1$.

$$b) \text{ On a } S_n = \int_1^{n+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx \text{ donc } \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) dx \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{On en déduit que } \ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \leq \ln(n+1).$$

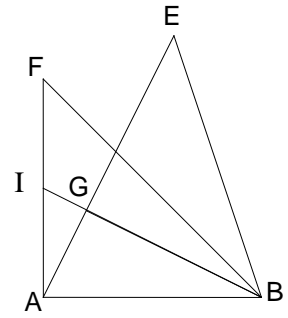
$$c) \text{ On sait } \ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

De plus pour tout $n > 1$, $\ln(n) > 0$ donc

$$\frac{\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \text{ et puisque}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]}{\ln(n)} = 1 \text{ on en déduit que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1.$$



EXERCICE 3

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle

tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,

I est le milieu de [AF]. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G

et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de

rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f .

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de $g \circ g$ et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan(\angle ABI) = \frac{1}{2}$. En déduire que $GB = 2 GA$.

d) En déduire que G est le centre de g .

3) Soit $r = g \circ f$.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer $r(E)$. En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

Contenu

- *Similitude directe.*
- *Composée de deux similitudes directes.*
- *Rotation.*

Aptitudes visées :

- Reconnaître l'image d'un point par une similitude directe.
- Identifier une similitude directe connaissant deux points et leurs images.
- Reconnaître la composée de deux similitudes directes non inverses et de rapports inverses.
- Exploiter une isométrie pour identifier une configuration usuelle du plan (carré).

Solutions et commentaires

1) Le triangle BEG est rectangle, isocèle en G et de sens direct donc
$$\begin{cases} \frac{BG}{BE} = \frac{BG}{\sqrt{2}BG} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Il en résulte que $f(E) = G$.

Le triangle BFA est rectangle, isocèle en A et de sens direct donc
$$\begin{cases} \frac{BA}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Il en résulte que $f(F) = A$.

✓ Il s'agit d'utiliser une configuration de bases usuelle (triangle rectangle et isocèle) pour identifier l'image d'un point par une similitude directe.

2) a) $\frac{FB}{AF} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB} \right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB} \right) [2\pi]$. Soit $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB} \right) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b) $g \circ g$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) $\tan(\angle ABI) = \frac{AI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AF}{AB} = \frac{1}{2}$ or $\tan(\angle ABG) = \frac{GA}{GB}$ donc $GB = 2GA$.

d) $g \circ g(A) = B$ et $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $GB = 2GA$ donc G est le centre de $g \circ g$ donc G est le centre de g .

✓ Il s'agit d'exploiter un résultat de cours : g et $g \circ g$ sont deux similitudes directes de même centre.

3) a) r est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angles respectifs

$-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$, il en résulte que r est une rotation et d'angle $-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ comme $(g \circ f)(F) = g(A) = F$

donc r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) $r(E) = g(f(E)) = g(G) = G$ donc $FE = FG$ et $GFE = \frac{\pi}{2}$ par suite le triangle EFG est rectangle et isocèle en F donc $GEF = \frac{\pi}{4}$. D'autre part H est le milieu de [BE] et le triangle EGB est rectangle et isocèle en G donc le triangle EGH est rectangle et isocèle en H donc $GEH = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que $HEF = \frac{\pi}{2}$.
D'où $GHE = EFG = HEF = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que le quadrilatère EFGH est un rectangle et puisque $FE = FG$ donc EFGH est un carré.

✓ Il s'agit d'utiliser un déplacement pour identifier une configuration usuelle (un carré).

EXERCICE 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\left(\frac{1+z}{z}\right)$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe (O, \vec{u}) .

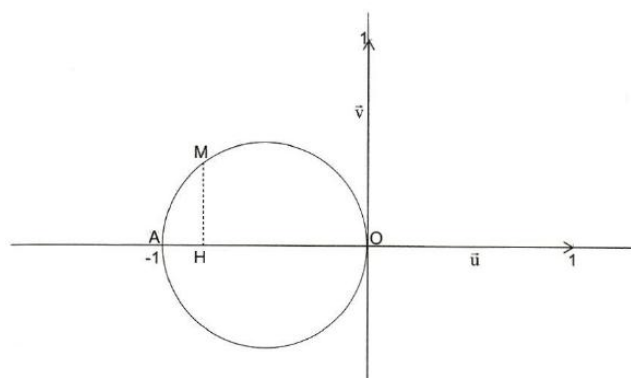
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ puis que $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

EXERCICE 4 : figure 2



Contenu

- *Ecriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Argument d'un nombre complexe non nul.*
- *Affixe et image .*

Aptitudes visées :

- *Déterminer l'écriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Repérer un point dans le plan et déterminer son affixe.*
- *Utiliser les nombres complexes pour déterminer un ensemble des points du plan.*
- *Utiliser les nombres complexes pour des constructions géométriques.*

Solutions et commentaires

1) a) Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $\frac{z - z^3}{z^2 - z^3}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

$$b) \frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}.$$

c) Soit M un point du plan d'affixe z non nulle et différente de 1 et -1.

(Le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases} \quad \text{si et seulement si } M \text{ appartient au cercle } \Gamma \text{ de centre}$$

$I\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A. Or le point I est le milieu de [OA] donc le cercle Γ est le cercle de diamètre [OA]. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle Γ de diamètre [OA] privé de O et A.

$$2) a) \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^2}{z}\right) [2\pi] \text{ donc } \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \arg(z) [2\pi] \text{ d'où } \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi].$$

$$\left(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OP}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right) [2\pi] \text{ donc } \left(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OP}\right) \equiv \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi].$$

$$b) OH = -x \text{ or } x^2 + y^2 + x = 0 \text{ donc } -x = x^2 + y^2 \text{ il en résulte que } OH = OM^2.$$

c) $ON = |z|^2 = OM^2 = OH$ donc N est le point d'intersection de la demi-droite $[OC)$ telle que $\left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OC}\right) \equiv \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$ avec le cercle de centre O et de rayon OH.

