

Exercice 1

1) a) $A(0,0,0)$, $C(6,6,0)$ et $H(0,6,6)$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 36 \\ -36 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (P) donc (P) : $x - y + z + d = 0$ et puisque A est un point de (P), il

en résulte que (P) : $x - y + z = 0$.

c) $\begin{cases} (\overrightarrow{EG}) \parallel (\overrightarrow{AC}) \\ (\overrightarrow{EB}) \parallel (\overrightarrow{CH}) \end{cases}$ donc les plans (P) et (Q) sont parallèles donc (Q) : $x - y + z + d = 0$,

or $B(6,0,0) \in (Q)$, il en résulte que $d = -6$. D'où (Q) : $x - y + z - 6 = 0$.

2) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$. On en déduit que la sphère S a pour rayon $R = \sqrt{3}$ et pour centre $I(1, -1, 1)$.

b) Soit (Δ) la perpendiculaire à (Q) et passant par A, (Δ) : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha \end{cases}$

$$J(x, y, z) \in \Delta \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}, \text{ il en résulte que } J(2, -2, 2).$$

$\begin{cases} A \in S \\ J \in S \\ I = A * J \end{cases}$, on en déduit que [AJ] est un diamètre de S.

c) $d(I, Q) = IJ = \sqrt{3} = R$ et $d(I, P) = IA = \sqrt{3} = R$ donc la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J.

3) a) $A' = t(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ donc $A'(2, 4, 2)$.

$$\text{On pose } J'(x, y, z). \quad J' = t(J) \Leftrightarrow \overline{JJ'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ y+2=4 \\ z-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \text{ donc } J'(4, 2, 4).$$

b) Soit I' l'image de I par t .

$$\text{On pose } I'(x, y, z). \quad I' = t(I) \Leftrightarrow \overline{II'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+1=4 \\ z-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \text{ donc } I'(3, 3, 3).$$

Ainsi l'image de S par t est la sphère S' de centre $I'(3, 3, 3)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc \vec{u} est un vecteur de P et de Q , il en résulte que $t(P) = P$ et $t(Q) = Q$.

La sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J donc $S' = t(S)$ est tangente à chacun des deux plans $t(P) = P$ et $t(Q) = Q$ respectivement en A' et J' .

Exercice 2

1) a) Une mesure de l'angle de f est $(\overline{AC}, \overline{BD}) \equiv (\overline{OC}, \overline{OD}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le rapport de f est $\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3}$.

$$\text{b) } \begin{cases} (\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \frac{OB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ donc } O \text{ est le centre de } f.$$

2) a) On sait que $[OA]$ est la hauteur issue de A dans le triangle ABD .

$f(C) = D$ et $f(D) = D'$ donc $(DD') \perp (CD)$ et $(CD) \parallel (AB)$ par suite $(DD') \perp (AB)$, il en résulte que (DD') est la droite qui porte la hauteur issue de D dans le triangle ABD .

D'autre part $f(D) = D'$ donc $(\overline{OD}, \overline{OD'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'où $D' \in (OA)$. On en déduit que D' est l'orthocentre du triangle ABD .

On sait que $f(D) = D'$ donc $OD = 3OD'$ et puisque $OA = 3OD$ donc $OA = 9OD'$.

b) On sait que $f(A) = B$, $f(B) = B'$, $f(C) = D$ et $f(D) = D'$, puisque $ABCD$ est un losange donc $BB'DD'$ est un losange.

3) a) g est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{3}$ et d'un antidéplacement (similitude indirecte de rapport 1) donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{3}$.

$$\text{b) } g(O) = f \circ S_{(AC)}(O) = f(O) = O.$$

$$g(A) = f \circ S_{(AC)}(A) = f(A) = B.$$

$$g(B) = f \circ S_{(AC)}(B) = f(D) = D'.$$

$$g(C) = f \circ S_{(AC)}(C) = f(C) = D.$$

$$g(D) = f \circ S_{(AC)}(D) = f(B) = B'$$

c) Puisque le rapport de g est $\frac{1}{3}$ et $g(O) = O$ donc O est le centre de g et comme $g(A) = B$ donc Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieure de AOB .

d) $M \in \Delta \cap (AB)$ donc $g(M) \in g(\Delta) \cap g((AB))$ donc $g(M) \in \Delta \cap (BD') = \{N\}$ d'où $g(M) = N$.

De même, on montre que $g(Q) = P$ par suite $MQ = 3NP$.

Exercice 3

1) a) Puisque $a \equiv 1 \pmod{10}$ donc $a^n \equiv 1 \pmod{10}, n \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $1 + a + \dots + a^9 \equiv 10 \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$.

b) On sait que $a \equiv 1 \pmod{10}$ donc $a - 1 \equiv 0 \pmod{10}$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - 1 = 10k$ et

$1 + a + \dots + a^9 \equiv 0 \pmod{10}$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $1 + a + \dots + a^9 = 10k'$, il en résulte que $a^{10} - 1 = 10^2 k k'$ ou encore $a^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{10^2}$ d'où $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

2) a)

Reste de $b \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste de $b^4 \pmod{10}$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

b) Soit r le reste de $b \pmod{10}$.

Si $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, alors 2 divise b et 10 donc $b \wedge 10 \neq 1$.

Si $r = 5$, alors 5 divise b et 10 donc $b \wedge 10 \neq 1$.

Si $r \in \{1, 3, 7, 9\}$ alors b n'est divisible ni par 2 ni par 5 donc $b \wedge 10 = 1$.

Ainsi $b \wedge 10 = 1 \Leftrightarrow r \in \{1, 3, 7, 9\}$ et d'après a) $r \in \{1, 3, 7, 9\} \Leftrightarrow b^4 \equiv 1 \pmod{10}$, on en déduit que

$$b^4 \equiv 1 \pmod{10} \Leftrightarrow b \wedge 10 = 1.$$

3) a) Si b est premier avec 10 alors d'après 2)b) $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ et d'après 1) $(b^4)^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$ d'où $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

b) $67 \wedge 10 = 1$ donc $67^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$ et $67^2 \equiv 89 \pmod{10^2}$ donc $67^{42} \equiv 89 \pmod{10^2}$.

Exercice 4

$$1) \ a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} 1 + \tan x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 1 + \tan x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty.$$

b) La fonction f est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ et pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x}$.

c) Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x} > 0$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

2) a) $f(0) = \ln 1 = 0$ donc $O \in (C)$.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2$ donc $A \in (C)$.

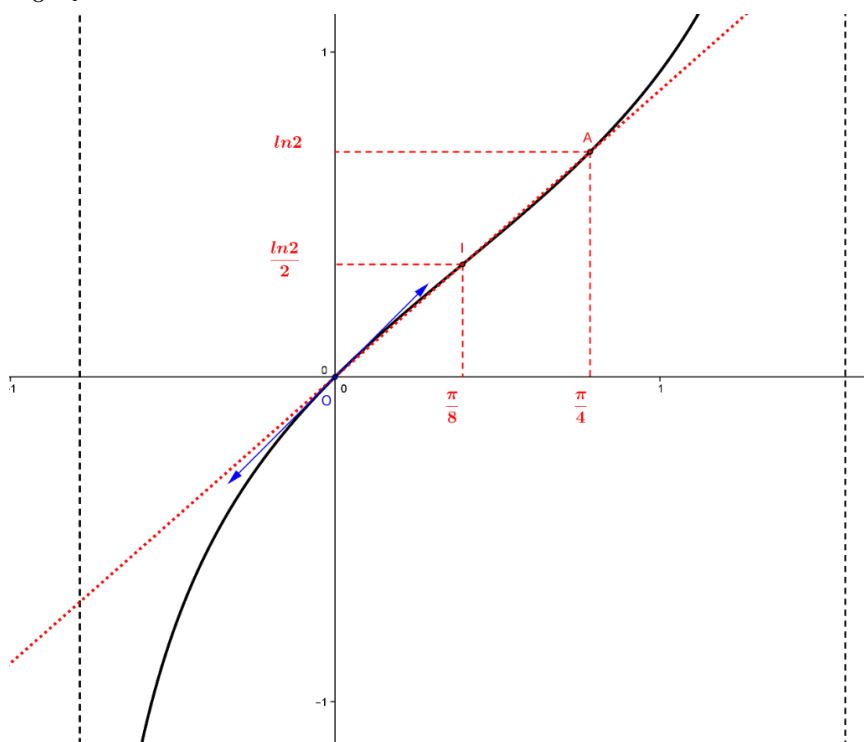
$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \ln \sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$ donc $I \in (C)$.

b)

$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right) = \ln 2 - \ln(1 + \tan x) = \ln 2 - f(x)$.

c) Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\frac{\pi}{4} - x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2 - f(x)$ donc I est un centre de symétrie de (C) .

3) $T_O : y = x$.



4) a) Les surfaces S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à I donc elles ont la même aire.

b) On désigne par $B\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ et $C\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites

$x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = A_{\text{triangleOBI}} - S_1 + A_{\text{trapèzeBCAI}} + S_2 = A_{\text{triangleOBI}} + A_{\text{trapèzeBCAI}} = A_{\text{triangleOAC}} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

5) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de

$$\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur } f\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}.$$

b) La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x} \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1 + \tan y}{1 + \tan^2 y}$ avec

$f^{-1}(x) = y, y \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(1 + \tan y) = x \Leftrightarrow \tan y = e^x - 1$. on en déduit

que pour tout $x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2}$.

$$c) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx = \int_0^{\ln 2} (f^{-1})'(x) dx = [f^{-1}(x)]_0^{\ln 2} = f^{-1}(\ln 2) - f^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}.$$