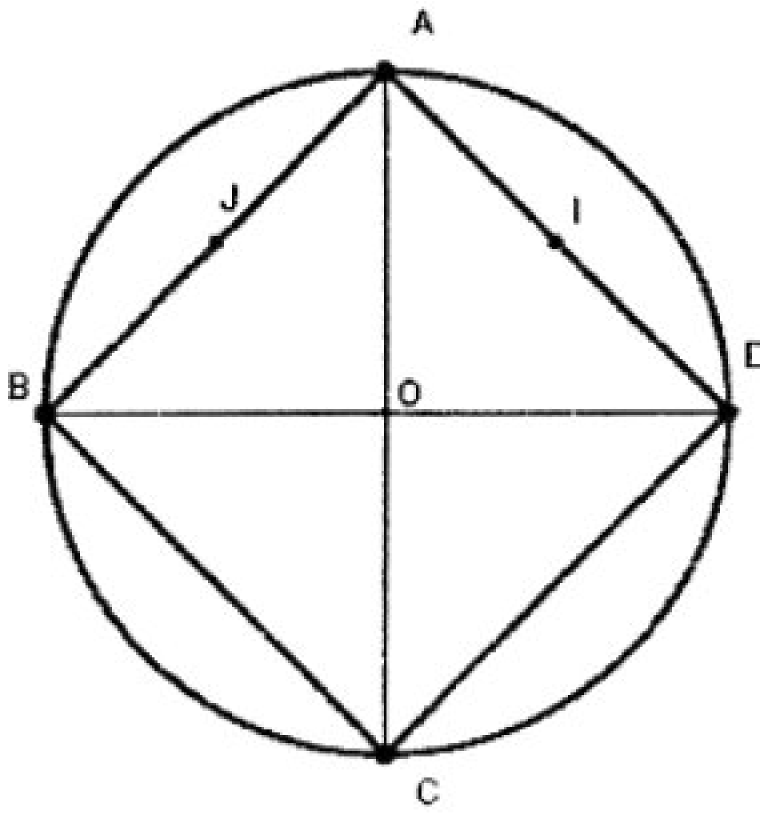
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve **: MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section **: Mathématiques**	**Session de contrôle**

Exercice 1 (4 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AB]$.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A sur B et I sur O.

   a) Justifier que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

   b) Déterminer le centre de f.

2) La droite (CJ) recoupe le cercle ($\mathscr{C}$) en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).

   a) Justifier que E est le milieu du segment $[AH]$ et en déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-EA^2$.

   b) Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$.

3) On considère la similitude indirecte g de centre E qui envoie B sur A.

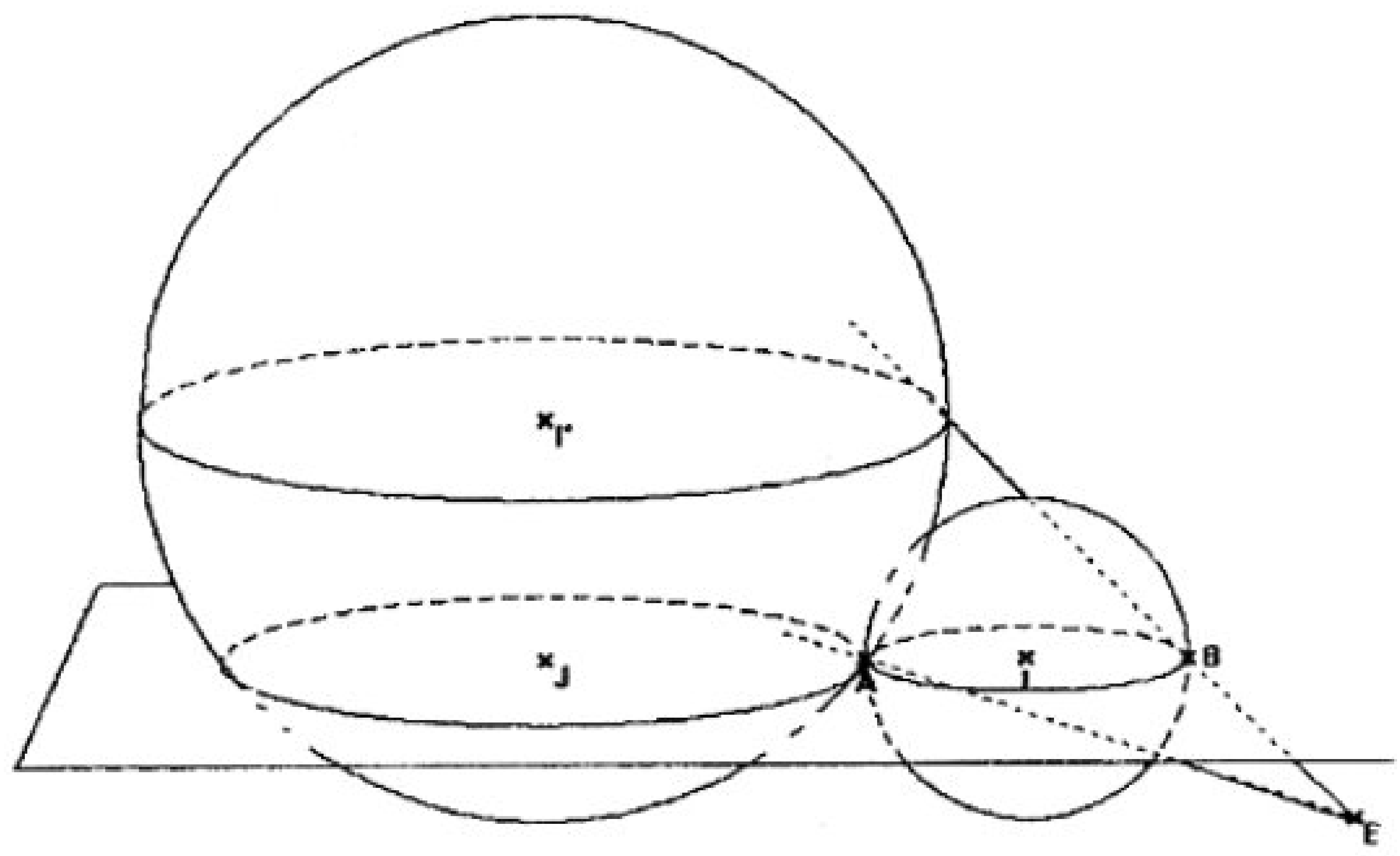
   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Soit $O'=g(O)$. Justifier que le triangle $O'EA$ est isocèle.

   c) Montrer que $O'A = AI$.

4) Soit $S = g\circ f$. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice 2 (5 points)



Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.
On considère les points $A(-2,3,2)$ et $B(2,3,2)$ et l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$.

1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.

   b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de S.

2) Soit P le plan d'équation $z = 2$ et soit $J(-6,3,2)$.

a) Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

b) Dans le plan P, on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.

Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A.

3) Soit E le point de coordonnées $(4,3,0)$. On considère l'homothétie h de centre E, de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h.

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b) Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ'.

c) La droite (EA) recoupe S' en A'. Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S'.
Montrer que les points E, B et B' sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

On a recensé, dans un pays, les dépenses en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2004 jusqu'à l'année 2013.

Le tableau ci- dessous donne ces dépenses Y (en 10^6 dinars) suivant le rang de l'année X.

Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses Y (10^6D)	0.38	0.46	0.52	0.78	0.86	0.92	0.96	1.02	1.08	1.20

Dans l'annexe ci-jointe (Figure1), on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le nuage de points de la série (X, Y).

1) On se propose d'ajuster la série double (X, Y) par la droite de Mayer. (Les valeurs seront arrondies au centième près).

a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

b) Soit G_1 le point moyen des cinq premiers points du nuage. Calculer les coordonnées de G_1.

c) Tracer la droite (GG_1) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

d) Déterminer une équation de la droite (GG_1) sous la forme $y = a x + b$.

e) En utilisant l'ajustement de cette série par la droite de Mayer, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2019.

2) On pose $Z = e^{Y}$ et on obtient le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	1.46	1.58	1.68	2.18	2.36	2.51	2.61	2.77	2.95	3.32

a) Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (X, Z).

b) Ecrire une équation de la droite affine de Z en X par la méthode des moindres carrés. (les coefficients de la droite seront arrondis au centième).

c) En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses de l'année 2019.

Exercice 4 (7 points)

I- 1) Soit la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(t)=3\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction u.

b) En déduire le signe de u.

2) Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} f(x)=x^3\left[\ln(1+x)-\ln x\right] \text{ si } x\in\,]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$.

b) Vérifier que pour tout $x\in\,]0,1]$, $f'(x)=x^2u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

II- On considère les fonctions g et h définies sur $[0,1]$ par

$$g(x)=x^3\ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} h(x)=x^3\ln x \text{ si } x\in\,]0,1] \\ h(0)=0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par (C_f) ,(C_g) et (C_h) les courbes des fonctions f, g et h dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que la courbe (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x de $[0,1]$; $f(x)=g(x)-h(x)$.

b) Donner la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

c) Soit T et T' les tangentes respectives à (C_f) et (C_g) aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

Montrer que T et T' sont parallèles.

3) Dans l'annexe ci-jointe (Figure2), on a tracé dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les courbes (C_g) et (C_h) et leurs tangentes aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

a) Construire le point de (C_f) d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ et la tangente (T).

b) Tracer la courbe (C_f).

4) a) Justifier que h admet une unique primitive H sur l'intervalle $[0,1]$ qui s'annule en 1.

b) Soit $\alpha\in\,]0,1]$ et $A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx$. Exprimer A_α en fonction de H.

c) Calculer A_α à l'aide d'une intégration par parties.

d) En déduire H(0).

e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.