MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques

Session principale : juin 2015

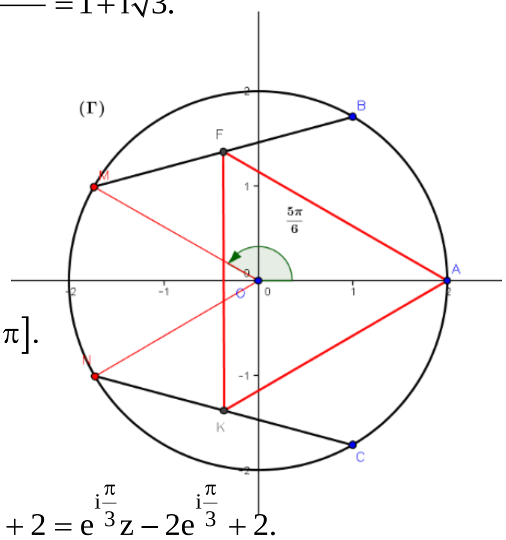
<u>Exercice 1</u> (Thème : nombres complexes)

1) a) $\Delta = 4-16 = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$; $z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1-i\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1+i\sqrt{3}$.

$S_C = \left\{1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}\right\}$.

b) $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) voir figure.



3) On sait que $N \in \Gamma$ donc $|z_N| = 2$.

De plus $\arg(z_N) \equiv \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{ON}}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{OM}, \widehat{\overrightarrow{ON}}\right) + \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi] \equiv \theta + \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_N = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) a) L'expression complexe de r est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - z_A\right) + z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2) + 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$.

b) $z_F = \dfrac{z_B + z_M}{2} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_K = \dfrac{z_C + z_N}{2} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En remplaçant z par z_F dans l'expression complexe de r, on obtient

$$z' == e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$$

$$= e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = z_K \text{ donc } r(F) = K.$$

c) Puisque $r(F) = K$ donc $\begin{cases} AF = AK \\ \left(\overrightarrow{AF}, \widehat{\overrightarrow{AK}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$, il en résulte que le triangle AFK est équilatéral.

5) a) $AF^2 = \left|e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right|^2 = \left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right)\left(e^{-i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2\right) =$

$$6 + 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\frac{\pi}{3} - 4\cos\theta = 4 - \left(3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right)$$

$$= 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi)\ ;$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

b) AF^2 est maximale si et seulement si $\begin{cases} \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \theta \in \left]-\pi, \pi\right] \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 (**Thèmes : similitude indirecte ; similitude indirecte ; antidéplacement)**

1) Une mesure de l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le rapport de f est $\frac{AC}{AB} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

2) a) Le rapport de g est $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

b) L'axe Δ de g est la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\widehat{CAB}$

c) On pose $g(B) = B'.$ On sait que $g \circ g = h_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}$ et $g \circ g(C) = B'$ donc $h_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}(C) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, or $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, on en déduit que $D = B'.$ Ainsi $g(B) = D.$

si g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport k ; alors : gog est l'homothétie de centre Ω et de rapport k^2

Puisque $g(B) = D$ donc $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\widehat{ABD}\right)$ d'où $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$, il en résulte que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}.$

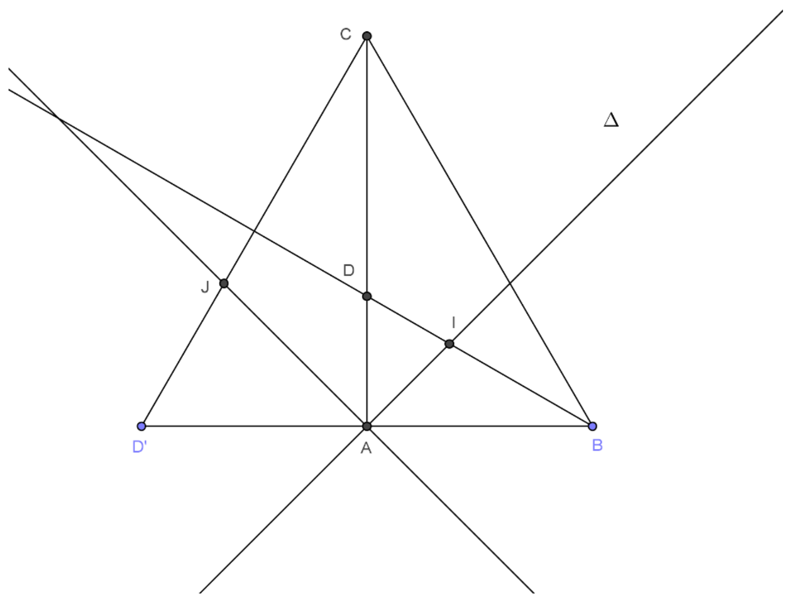
la composée d'une similitude directe de rapport k et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{k}$ est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.

3) a) $f \circ g$ est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $f \circ g$ et un antidéplacement

or $f \circ g(A) = A$ et $f \circ g(C) = C$ donc $f \circ g$ est une symétrie orthogonale d'axe (AC).

b) On a $f \circ g(B) = D'$ donc $S_{(AC)}(B) = D'$ d'où $(AC) \perp (BD')$ et $(AC) \perp (BA)$ donc B, A et D' sont alignés or AB = AD' donc A est le milieu de [BD] et par suite $S_A(B) = D'.$

4) $\{I\} = (BD) \cap \Delta$ donc $f(I) \in f((BD)) \cap f(\Delta)$, or $f(\Delta) = S_{(AC)} \circ g^{-1}(\Delta) = S_{(AC)}(\Delta) = (AJ).$ d'où $f(I) \in (CD') \cap (AJ) = \{J\}.$



Exercice 3 (Thème : arithmétique)

1) a) $47\times(-9)+53\times8=1$ donc $(-9,8)$ est solution de (E).

b) $47x+53y=47\times(-9)+53\times8 \Leftrightarrow 47(x+9)=53(8-y)$ donc 47 divise $53(8-y)$ et $47\wedge53=1$ donc 47 divise $(8-y)$ d'où $y=8-47k, k\in Z$ par suite $x=53k-9, k\in Z$.

Ainsi $S_{Z\times Z}=\{(53k-9,8-47k), k\in Z\}$.

c) soit x un inverse de 47 modulo 53, alors $47x\equiv1(\mathrm{mod}\,53) \Leftrightarrow$ il existe un entier y tel que

$47x=1+53y \Leftrightarrow 47x-53y=1 \Leftrightarrow (x,-y)$ solution de (E) donc $x=53k-9, k\in Z$

d) $0<x=53k-9<53 \Leftrightarrow \frac{9}{53}<k<\frac{62}{53}, k\in Z$ donc $k=1$ d'où $x=44$.

2) a) D'après Fermat $45^{52}\equiv1(\mathrm{mod}\,53)$

b) $45^{106}=\left(45^{52}\right)^2\times45^2\equiv45^2(\mathrm{mod}\,53)\equiv11(\mathrm{mod}\,53)$.

3) a) N est la somme de 106 termes d'une suite géométrique de raison 45

donc $N=\frac{1-45^{106}}{1-45} \Leftrightarrow 44N=45^{106}-1\equiv10(\mathrm{mod}\,53)$

b) $44N\equiv10(\mathrm{mod}\,53)$ donc $N\equiv470(\mathrm{mod}\,53)\equiv46(\mathrm{mod}\,53)$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction , bijection , calcul intégral , notion d'aire)

I.

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,\pi]$ et $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

b) Pour tout $x\in[0,\pi]$, $\pi-x\in[0,\pi]$ et $f(\pi-x)=e^{\sin(\pi-x)}=e^{\sin x}=f(x)$.

c) $(T): y=f'(0)x+f(0)=x+1$.

2) a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]$ donc

$g\left(\left]0,\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]\right)=\left]0,g\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)\right]$ par suite $g(x)>0$ sur $\left]0,\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ sur $g\left(\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[\right)=\left]-1,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$, $0\in\left]-1,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ donc il existe un unique $\alpha\in\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ tel que $g(\alpha)=0$. Ainsi l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0,1[$.

b)

x	0 $\qquad$ α $\qquad$ 1
$g(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$

3) a) La fonction h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $h'(x)=(\cos x)e^{\sin x}-1=g(\sin x)$.

b) La fonction $x\mapsto\sin x$ est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$,

or $\alpha\in[0,1]$ donc il existe un unique $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$

c) La fonction $x\mapsto\sin x$ est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $[0,\alpha]$ donc

$\sin([0,\beta])=[\sin 0,\sin\beta]=[0,\alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[\alpha,1]$.

d)

x	0 $\qquad$ β $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
h	0 $\nearrow$ $h(\beta)$ $\searrow$ $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

e) $h([0,\beta])=[0,h(\beta)]$ et $h\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right),h(\beta)\right]$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ donc $h(x)\geq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par suite $f(x)\geq x+1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc (C_f) est en dessus de (T).

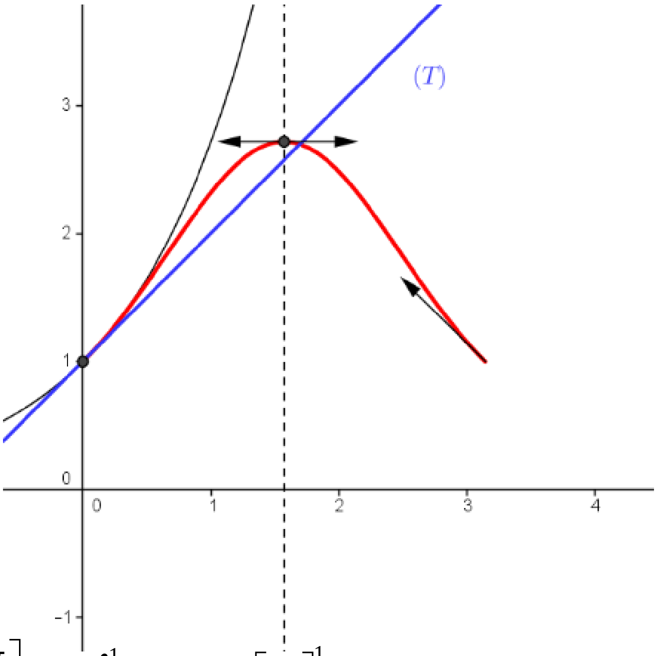
II.

1) a) pour tout $x\geq 0$, $\cos t\leq 1, t\in[0.x]$ et $t\mapsto\cos t$ est continue sur $[0.x]$ donc $\int_0^x\cos t\,dt\leq x$ donc $\sin x\leq x$.

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur IR et $\sin x \le x$ pour tout $x \ge 0$ donc

$e^{\sin x} \le e^x \Leftrightarrow f(x) \le e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c)



2) a) on sait que $f(x) \le e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx \le \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

on sait que $\sin x \le 1$ donc $f(x) \le e$ donc $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

b) $A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

$\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le e - 1 + e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ donc $\frac{\pi^2}{4} + \pi \le A \le e\pi - 2$