RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES** Section : **Mathématiques** Durée : **4 h** — Coefficient : **4**
SESSION **2016**	**Session de contrôle**

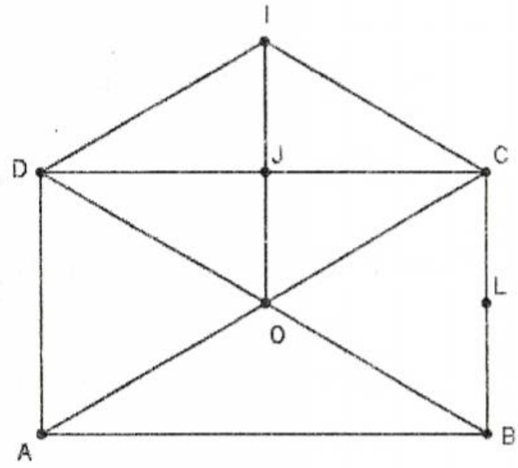
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6
Les pages 5/6et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment $[CD]$ et le point L est le milieu du segment $[BC]$.



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(D)$.

b) Montrer que $R(A) = B$.

2) Soit $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$.

a) Vérifier que $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Soit K le milieu du segment $[IC]$. Montrer que $\varphi(B) = K$.

c) Montrer que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par (E) l'ellipse d'équation : $x^2 + 9y^2 = 9$.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, (C_1) est le cercle de centre O et de rayon 1, (C_2) est le cercle de centre O et de rayon 3, N est le point de coordonnées $(\cos\theta , \sin\theta)$. P est le point de coordonnées $(3\cos\theta , 3\sin\theta)$, où θ est un réel appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit M le point de coordonnées $(3\cos\theta , \sin\theta)$.

a) Vérifier que M est un point de l'ellipse (E).

b) Placer le point M.

c) Justifier qu'une équation de la tangente T à (E) en M est $x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$.

2) La tangente T à (E) en M coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.

a) Déterminer les coordonnées des points H et K.

b) Montrer que $HK^2 = \dfrac{9}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = HK^2$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 2\left(4\sin^2\theta - 1\right)\dfrac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}$.

b) En déduire que la distance HK est minimale si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

c) On désigne par D le point de l'ellipse (E) correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Construire le point D ainsi que la tangente en ce point à l'ellipse (E).

Exercice 3 (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod 4$.

a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 5$.

b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 2$.

c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$.

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $25x - 21y = 4$.

a) Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) Soit (α, β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^{α} et n^{β} ont le même chiffre d'unité.

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right]$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}$.

b) En écrivant $\dfrac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \dfrac{-\left(\ln x + \sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \dfrac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = -\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) On donne, ci-dessous, le tableau donnant le signe de $f''(x)$, le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		α		β		$e^{\sqrt{2}}$
$f''(x)$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	||
$f'(x)$	||	$+$	0		$-$				||
f	0	$\nearrow$	e		$\searrow$				0

Justifier que les points C et D, de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, sont deux points d'inflexion de C_f.

3) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct ;

A et B sont les points de coordonnées respectives $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$;

C et D sont les points de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$;

Γ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

a) Construire les points de C_f d'abscisses $e^{-\sqrt{2}}$, e^{-1} et $e^{\sqrt{2}}$.

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \sin x$.

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

On note h sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Soit u la fonction définie sur $\left[e^{-1}, e\right]$ par $u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que pour tout $x \in \left]e^{-1}, e\right[$, $u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{2}$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = e$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = 2 + \int_{e^{-1}}^{e} \left(\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\right) dx$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \left]e^{-1}, e\right[$, $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$.

c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

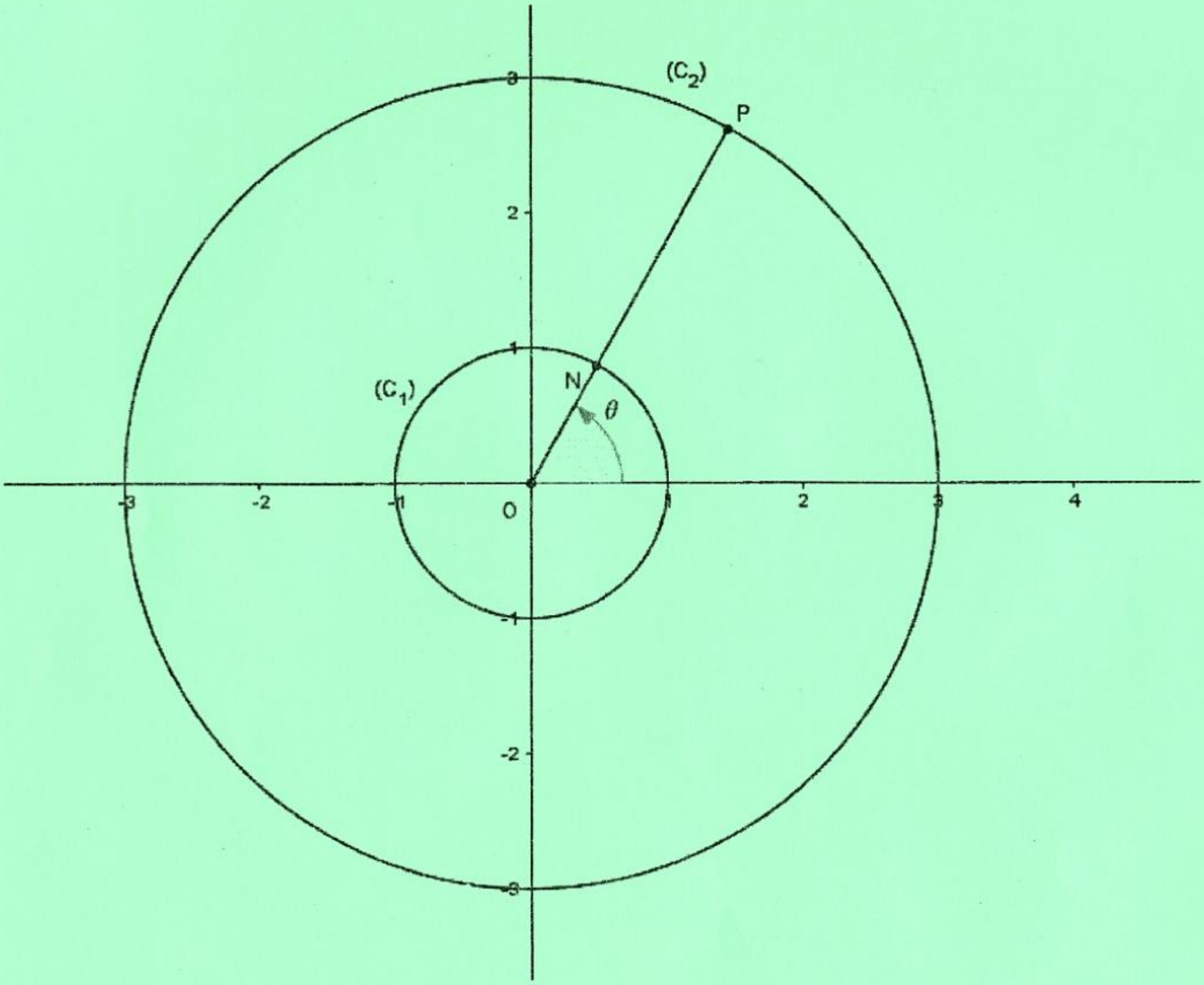


Figure 1

Annexe 2 (à rendre avec la copie)

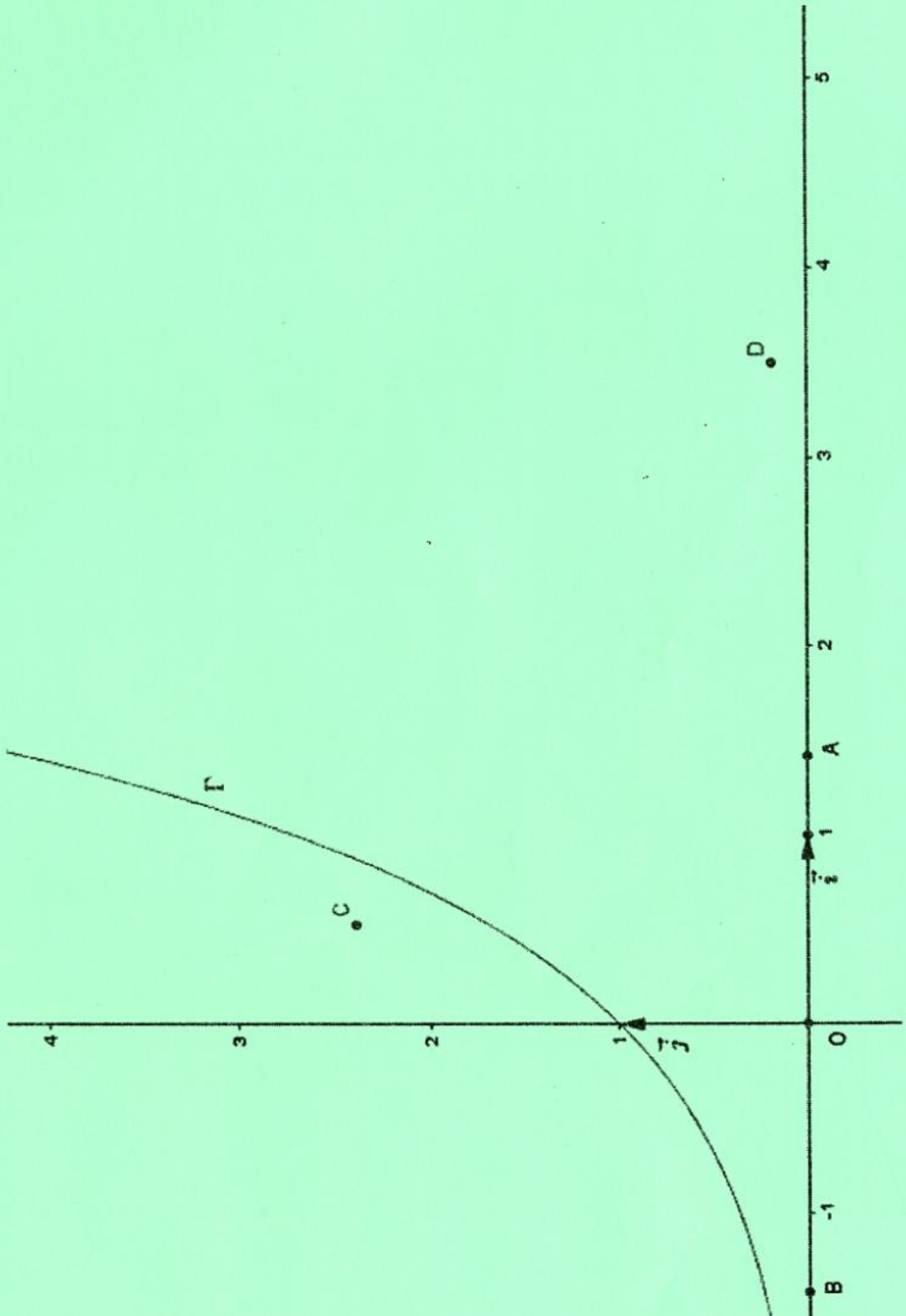


Figure 2