


REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	Session de contrôle	
	Epreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	
		Coefficient de l'épreuve : 4

*Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.
Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.*

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la Figure 1 de l'annexe jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$;
- \mathcal{C}_1 est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment [BC] ;
- AICD est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.

Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidépacement tel que $g(A) = C$ et $g(B) = A$.

a) Justifier que g est une symétrie glissante.

b) Montrer que $g = t_{\vec{BI}} \circ S_{\Delta}$, où Δ est la médiatrice du segment [AI].

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que $h(O) = I$. On pose $\varphi = g \circ h \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{2}$.

b) Montrer que $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O) = D$.

4) Soit $E = \varphi(C)$.

a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

b) Justifier que $(\vec{DC}, \vec{DE}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

c) Construire alors le point E.

d) Soit Ω le centre de φ .

Montrer que $\vec{\Omega B} = \frac{4}{5} \vec{BE}$. Construire le point Ω .

5) On pose $\mathcal{C}_2 = \varphi(\mathcal{C}_1)$.

Le cercle \mathcal{C}_2 coupe le cercle \mathcal{C}_1 au point C et en un autre point M. On pose $N = \varphi(M)$.

Montrer que les points Ω , B et M sont alignés. Construire alors le point N.

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;
- les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à $\frac{2}{3}$.

On tire, au hasard, une pièce de l'urne et on effectue n lancers successifs de cette pièce, $n \geq 1$.

On considère les événements suivants :

- E : « la pièce tirée est équilibrée ».
- F_n : « on obtient FACE pour les n lancers ».

1) a) Déterminer $p(E)$, $p(F_1/E)$ et $p(F_1/\bar{E})$.

b) Montrer que $p(F_1) = \frac{5}{9}$.

2) Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$.

3) Soit X_n la variable aléatoire définie de la manière suivante : $\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé ;} \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Donner la loi de probabilité de X_n .

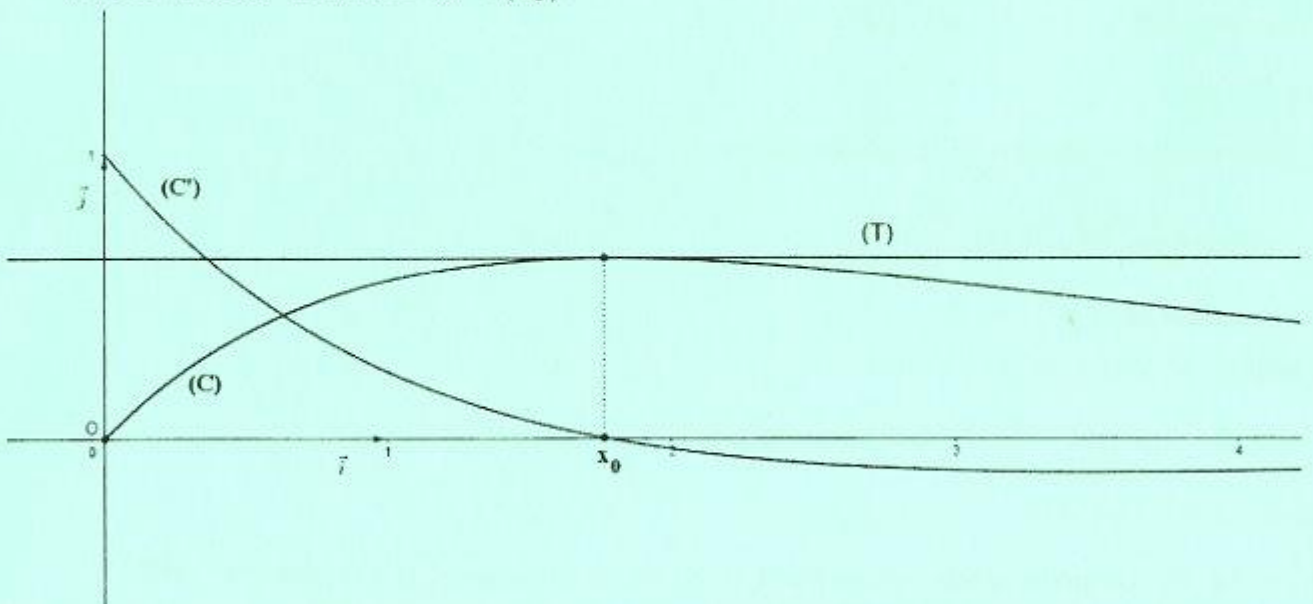
b) Déterminer l'espérance mathématique de X_n .

c) Dans la figure ci-dessous,

- (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan,
- (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$

$$\text{par } f(x) = \frac{x}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \right).$$

- (C') est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f ,
- la courbe (C') coupe l'axe (O, \vec{i}) en un seul point d'abscisse x_0 ,
- (T) est la droite d'équation $y = f(x_0)$.



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier naturel n pour lequel l'espérance mathématique $E(X_n)$ est maximale.

Exercice 3 (7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln x$.

a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 + x \ln x \geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + x \ln x} & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes

(C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse $1 - \frac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de (C_f) d'abscisse $\frac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de (C_f) et (C_2) .

c) Tracer la courbe (C_f) .

5) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

a) Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t + t \ln(t)} \leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto x - F(x)$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1, +\infty[$ une seule solution α_n .

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Exercice 4 (5 points)

1) On considère, dans \mathbb{C} , l'équation (E): $z^2 - (1+i)z - i = 0$.

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 , les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, i, z_1 et z_2 .

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2 .

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z' = \frac{z+i}{z-i}$.

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z = i + 2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z' = 1 + ie^{-i\theta}$.

c) Montrer que $AM' = 1$ et que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ .

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$.

a) Vérifier que $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta} + ie^{-i\theta}}{2}$.

b) En déduire que $z_Q = \frac{i\sqrt{2} + 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$.

c) Montrer alors que $z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ , le point Q varie sur l'ellipse \mathcal{E} d'équation

$$4x^2 + \frac{4}{9} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1.$$

b) Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) le cercle Γ , l'ellipse \mathcal{E} ,

et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \theta [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Empty box for identification details.

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Empty box for identification details.

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session de contrôle - 2018
Annexe à rendre avec la copie

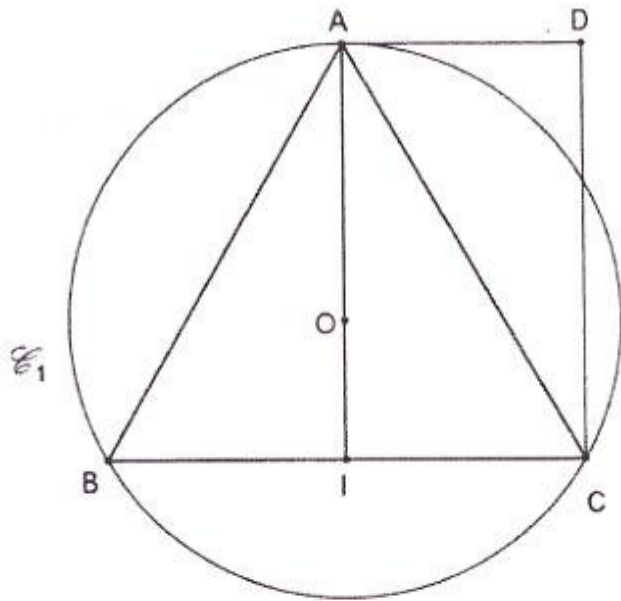


Figure 1

Ne rien écrire ici

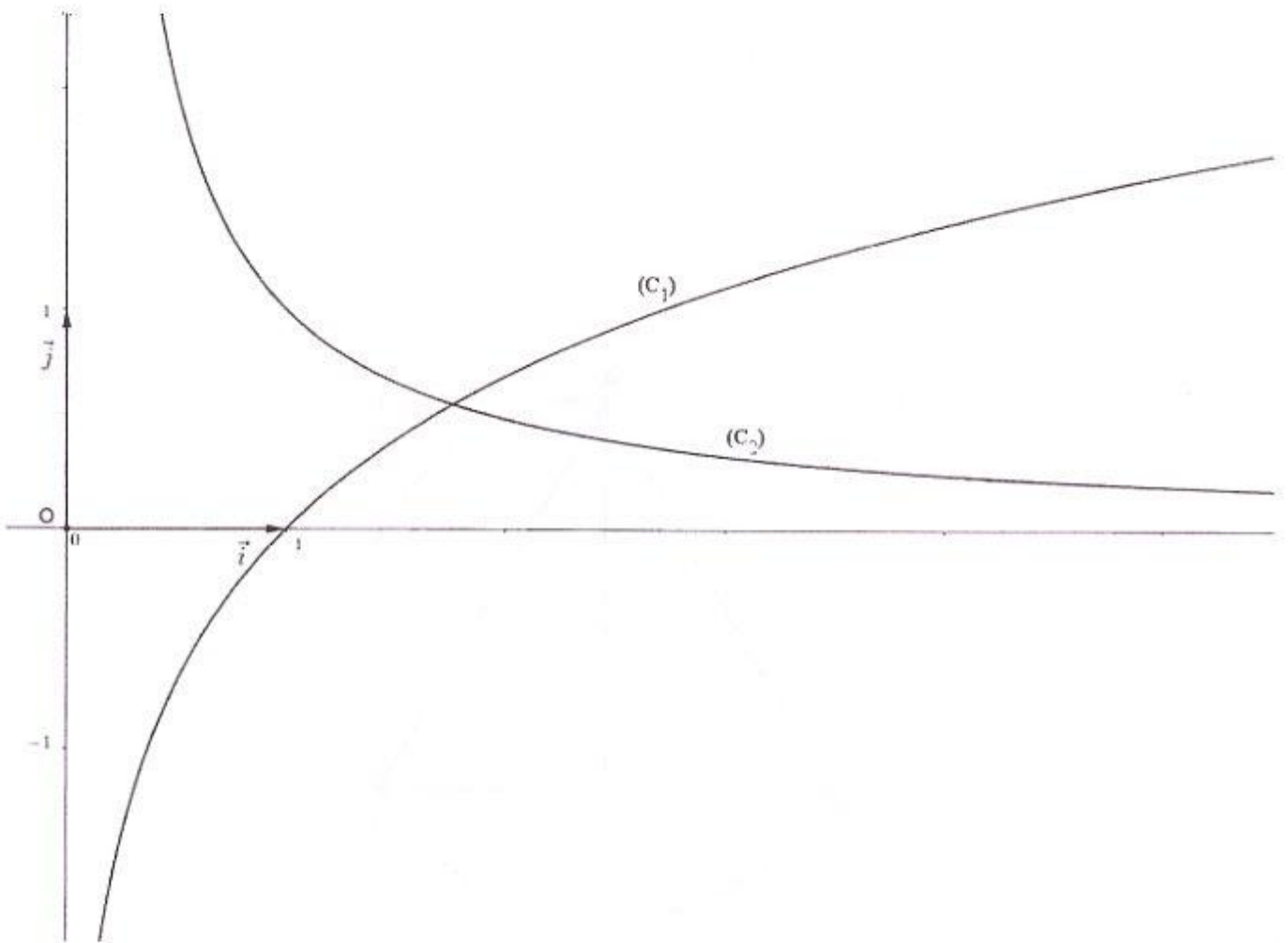


Figure 2

Ne rien écrire ici

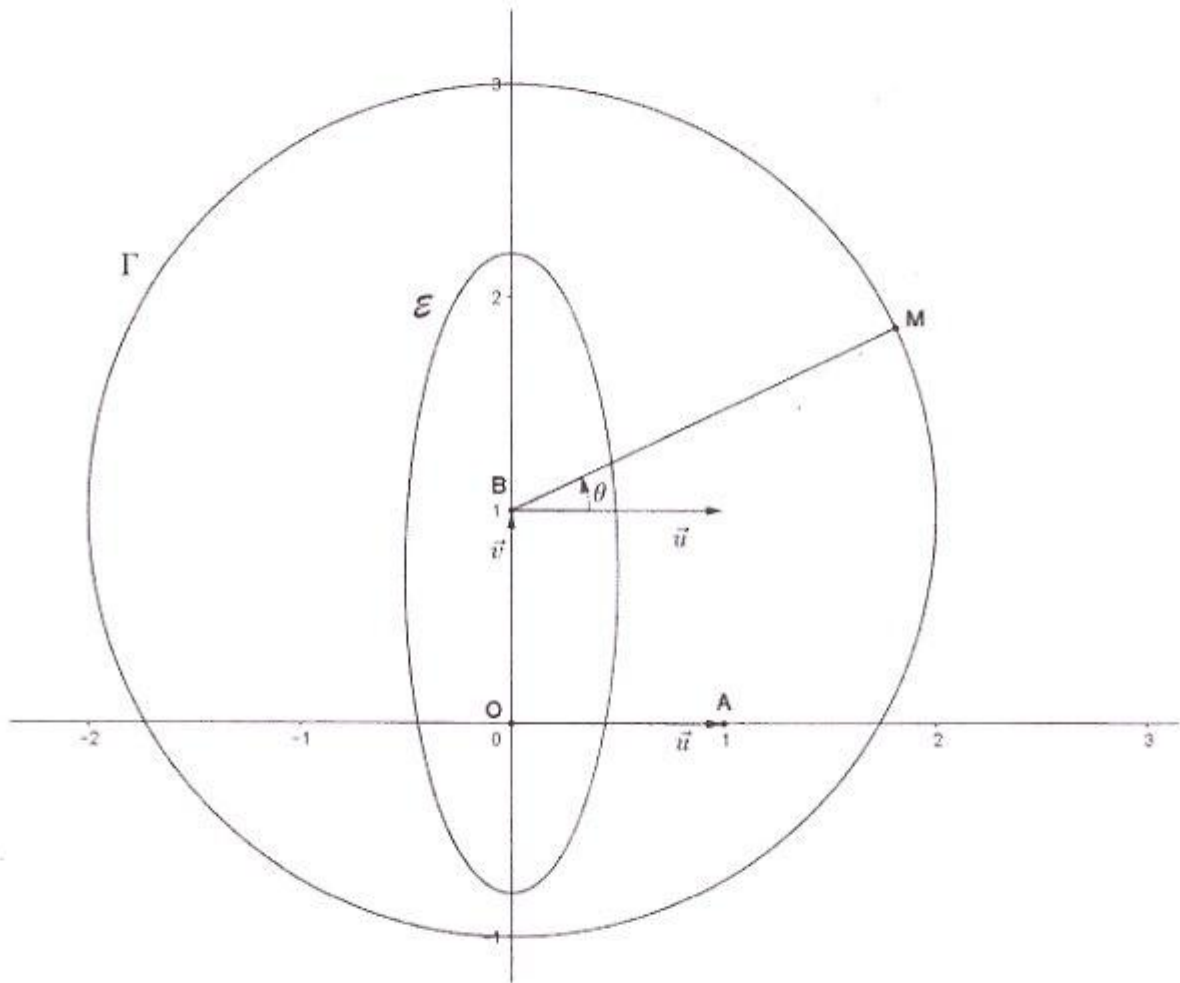


Figure 3