

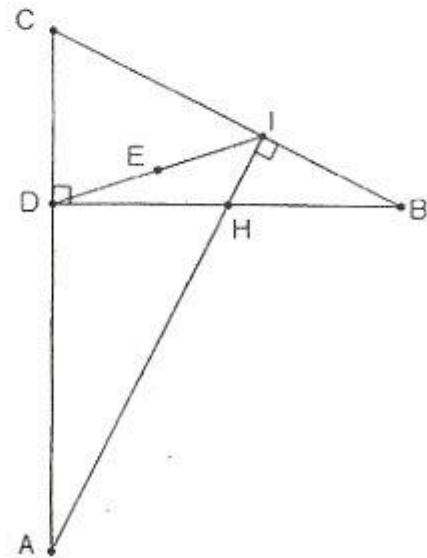
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	<b>Session principale</b>	
	<i>Epreuve :</i> <b>Mathématiques</b>	<i>Section :</i> <b>Mathématiques</b>
	Durée : <b>4h</b>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">◆</div>

*Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.  
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.*

**Exercice 1 (5 points)**

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que  $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $DB = 2DC$  ;
- le point H est le milieu du segment  $[DB]$  ;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite  $(BC)$  ;
- le point E est le milieu du segment  $[ID]$  ;
- les droites  $(IH)$  et  $(CD)$  se coupent au point A.



1) Soit R la rotation de centre H et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a) Calculer  $\widehat{CBD}$ . En déduire que  $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$ .

b) Montrer alors que  $R(I) = E$ .

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose  $f = h \circ R$ .

a) Déterminer  $f(H)$ .

b) Montrer que  $f(I) = I$ .

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que  $f(C) = A$ .

3) a) La droite  $(CH)$  coupe la droite  $(AB)$  en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre  $[BH]$ .

En déduire que  $\left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

b) Montrer alors que l'image par f de la droite  $(ID)$  est la droite  $(IF)$ .

c) La droite  $(ID)$  coupe les droites  $(CF)$  et  $(AB)$  respectivement en J et  $\Omega$ . Montrer que  $f(J) = F$ .

d) Montrer que  $f(F) = \Omega$ .

4) Montrer que le triangle  $CA\Omega$  est rectangle.

### Exercice 2 (3 points)

Soit  $\theta$  un réel non nul.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct ;
- $\mathcal{C}$  est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de  $\mathcal{C}$  tel que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) \equiv \theta [2\pi]$  ;
- F et G sont les points d'affixes, respectives,  $-1$  et  $1+\sqrt{2}$  ;
- $\Gamma$  est le demi-cercle de diamètre  $[FG]$  ;
- D est le point d'intersection de  $\Gamma$  et l'axe  $(O, \vec{v})$ .

1) a) Vérifier que  $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$ .

b) Soit A le point d'affixe  $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta}$ . Vérifier que  $z_A = OD e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$ . Construire alors le point A.

2) On considère, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$ .

a) Vérifier que  $z_A$  est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe  $z_B$ , où  $z_B$  est la deuxième solution de (E).

Déterminer  $z_B$ .

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe  $z_C = OD e^{i\theta}$ .

c) Montrer que  $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ .

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

d) Construire alors le point B.

### Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Vérifier que  $f$  est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Dans la Figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $\Gamma$

de la fonction  $x \mapsto e^x$  et les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  d'équations respectives  $y=x$  et  $y=-x$ .

a) Construire les points A et B de  $(C_f)$  d'abscisses respectives  $e$  et  $\frac{1}{e}$ .

b) Déterminer la position relative de  $(C_f)$  et  $\Delta$  puis la position relative de  $(C_f)$  et  $\Delta'$ .

c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

3) Soit  $S$  la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

Montrer que l'aire de la partie  $S$  est égale à  $\frac{1}{4} \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$ .

**B)** Soit  $n$  un entier naturel.

On pose  $u_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t dt$  et  $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t f(t) dt$ .

1) a) Montrer que  $u_n > 0$ .

b) Montrer que  $0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

c) Montrer que  $u_{n+1} = e - \frac{e^e}{e^{n+1}} - (n+1)u_n$ .

d) Montrer alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = e$ .

2) a) Montrer que  $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$ . Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

b) Vérifier que pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $f(t) = t f'(t) - t$ .

Montrer alors que  $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt - u_{n+1}$ .

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $(n+2)v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$ .

d) Montrer alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)v_n = 0$ .

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel  $\alpha_n$  appartenant à l'intervalle  $\left[ \frac{1}{e}, 1 \right]$  tel que  $f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ .

c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .

#### Exercice 4 (5 points)

**A)** Soit  $q$  un entier naturel.

1) Montrer que  $q^2$  est impair si et seulement si  $q$  est impair.

2) Montrer que si  $q$  est impair alors  $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

**B)** On se propose de déterminer l'ensemble  $A$  des triplets d'entiers naturels non nuls  $(m, n, q)$

tels que  $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$ .

1) Vérifier que le triplet  $(2, 1, 5)$  est un élément de  $A$ .

Dans la suite de l'exercice on suppose que  $(m, n, q)$  est un élément de  $A$ .

2) a) Montrer que  $q$  est impair.

b) Montrer que  $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{8}$ .

c) Montrer alors que  $m$  est différent de 1.

3) On suppose que  $m \geq 2$ .

a) Justifier que les entiers  $(q-3^n)$  et  $(q+3^n)$  sont pairs.

b) Soit  $d = (q-3^n) \wedge (q+3^n)$ .

Montrer que  $d$  divise  $2q$  et que  $d$  divise  $2^{2m}$ . En déduire que  $d = 2$ .

c) Montrer que  $q-3^n = 2$  et que  $q+3^n = 2^{2m-1}$ .

En déduire que  $q = 2^{2m-2} + 1$  et que  $3^n = 2^{2m-2} - 1$ .

4) Déterminer  $n$  et  $q$  lorsque  $m = 2$ .

5) On suppose que  $m \geq 3$ .

a) Montrer que  $3^n \equiv -1 \pmod{16}$ .

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel  $k$ , les restes possibles de  $3^k$  dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets  $(m, n, q)$  éléments de l'ensemble  $A$  tels que  $m \geq 3$ .

6) Déterminer l'ensemble  $A$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....

✂

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session principale - 2018

Annexe à rendre avec la copie

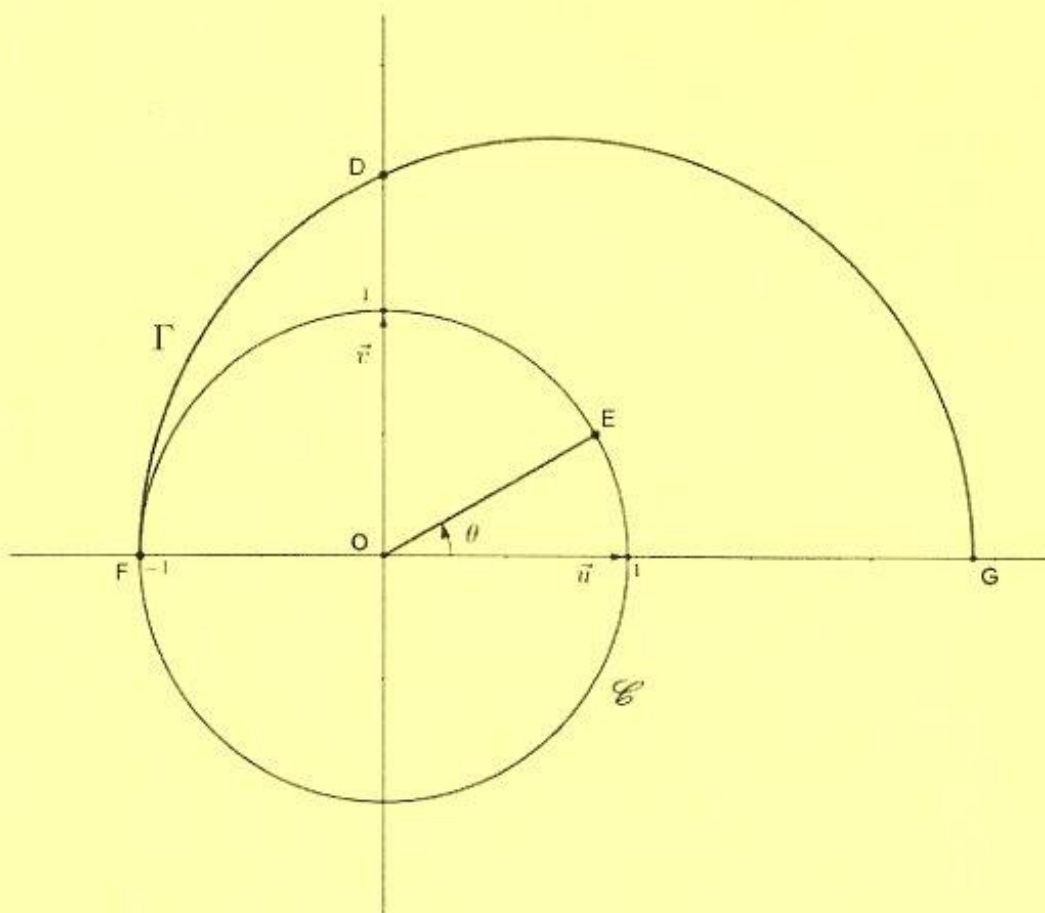


Figure 1

Ne rien écrire ici

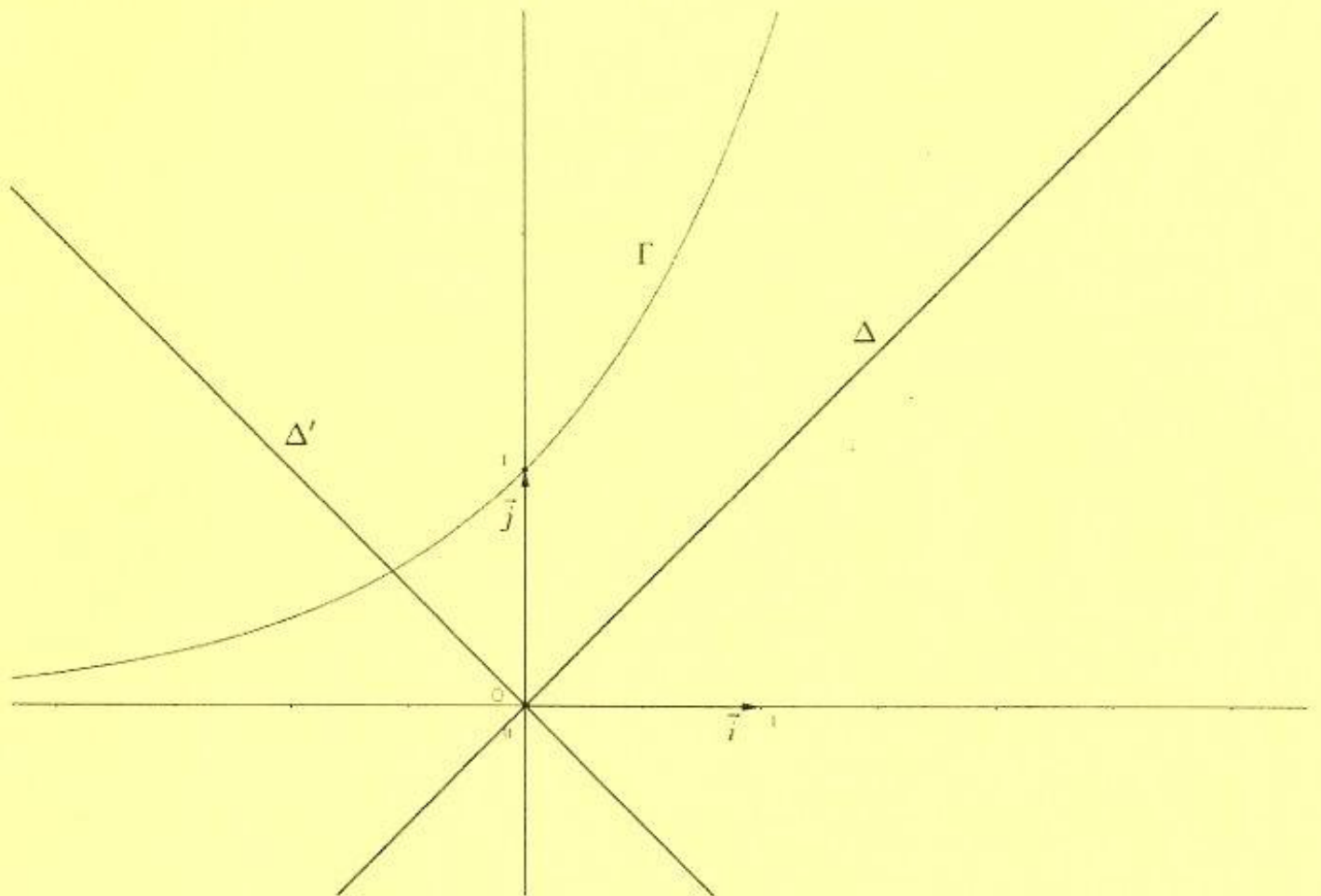


Figure 2