

# CORRECTION : EPREUVE MATHÉMATIQUES Session de contrôle 2019 BAC MATHS

## Exercice N°1 :

$$1^\circ) (t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)})^{-1} = (S_{(AC)})^{-1} \circ (t_{\overline{AC}})^{-1} = S_{(AC)} \circ t_{\overline{CA}} \text{ et } S_{\Delta} \circ S_{(AC)} = t_{\overline{AB}} \text{ car } \Delta \parallel (AC)$$

$$\Rightarrow (t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta}) \circ (t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)})^{-1} = t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} \circ S_{(AC)} \circ t_{\overline{CA}} = t_{\overline{BC}} \circ t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{CA}} = t_{\overline{0}} = idp$$

$$\Rightarrow t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)} \Rightarrow \text{Vrai}$$

**Ou bien :**  $t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{BA+AC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ t_{\overline{BA}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)}$  car  $t_{\frac{1}{2}\overline{BA}}(\Delta) = (AC)$

$$2^\circ) S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = S_{(AB)} \circ S_{(AC)} \circ h_{(A,2)} = r_{(A,\pi)} \circ h_{(A,2)} = h_{(A,-2)} \Rightarrow \text{Vrai}$$

$$3^\circ) f \text{ est une isométrie qui fixe } A \text{ et } B \text{ donc } f = idp \text{ ou } f = S_{(AB)} \text{ d'où } f^{-1} = idp \text{ ou } f^{-1} = S_{(AB)}$$

- $f = idp \Rightarrow f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f = S_{\Delta}$

- $f = S_{(AB)} \Rightarrow f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f = S_{(AB)}^{-1} \circ S_{\Delta} \circ S_{(AB)} = \overbrace{S_{(AB)}^{-1} \circ S_{(AB)}}^{idp} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta}$

Donc  $f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f = S_{\Delta} \Rightarrow \text{Faux}$

## Exercice N°2:

1°) a) figure 1

b)  $I \neq D$  et  $D \neq K$  donc il existe une similitude indirecte  $g$  qui transforme  $I$  en  $D$  et  $D$  en  $K$

c) Soit  $k$  le rapport de  $g$  on a :  $k = \frac{DK}{ID} = \frac{|z_K - z_D|}{|z_D - z_I|} = \frac{|3i - 2i|}{|2i - 1 - i|} = \frac{|i|}{|-1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $\triangle IDO$  est un triangle rectangle et isocèle en  $I$ , on sait que  $g(I) = D$  et  $g(D) = K$

$\Rightarrow g(\triangle IDO) = \triangle DKC$  est un triangle rectangle et isocèle indirecte en  $D$  d'où  $g(\triangle IDO) = \triangle DKC$

2°) a)  $g(M) = M' \Leftrightarrow z' = az\bar{b} + b$ , on a  $g(\triangle IDO) = \triangle DKC$  donc  $g(O) = C \Rightarrow b = 1 + 2i$

$$g(D) = K \Rightarrow 3i = a \times 2i + b \Rightarrow 3i = -2ia + 1 + 2i \Rightarrow -1 + i = -2ia \Rightarrow a = \frac{-1 + i}{-2i} = -\frac{1 + i}{2}$$

Donc  $z' = -\frac{1}{2}(1 + i)\bar{z} + 1 + 2i$

b)  $z_{\Omega} = \frac{a \times \bar{b} + b}{1 - |a|^2}$

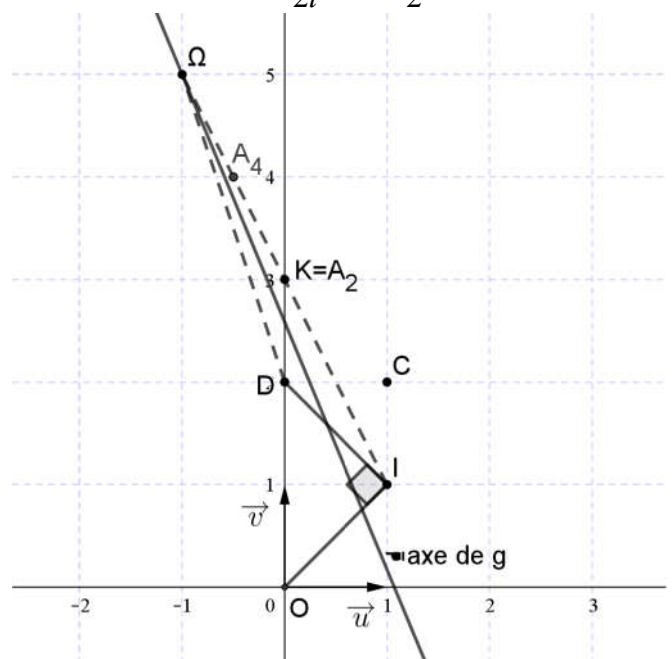
- $a \times \bar{b} + b = -\frac{1}{2}(1 + i)(1 - 2i) + 1 + 2i$   
 $= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

- $1 - |a|^2 = 1 - \left|-\frac{1}{2}(1 + i)\right|^2 = \frac{1}{2}$

il en résulte que  $z_{\Omega} = -1 + 5i$

$\Rightarrow K$  est le milieu de segment  $[\Omega I]$

d) L'axe de  $g$  porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\hat{I}\Omega D$



$$3^\circ) \text{ a) } g = \overbrace{h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \circ S_\Delta}^{\text{forme réduite}} = S_\Delta \circ h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow g \circ g = h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \circ \overbrace{S_\Delta \circ S_\Delta}^{idp} \circ h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = h \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \text{ (h' homothétie)}$$

$$\text{b) } A_0 = I \Rightarrow A_2 = h(A_0) = h(I) \Rightarrow \overline{\Omega A_2} = \frac{1}{2} \overline{\Omega I} = A_2 = K$$

$$A_4 = h(A_2) = h(K) \Rightarrow \overline{\Omega A_4} = \frac{1}{2} \overline{\Omega K} \Rightarrow A_4 \text{ est le milieu du segment } [\Omega K]$$

$$\text{c) } A_2 = h(A_0) \text{ et } A_4 = h(A_2) \Rightarrow \overline{A_2 A_4} = \frac{1}{2} \overline{A_0 A_2} \Rightarrow A_2 A_4 = \frac{1}{2} A_0 A_2$$

$$A_4 = h(A_2) \text{ et } A_6 = h(A_4) \Rightarrow \overline{A_4 A_6} = \frac{1}{2} \overline{A_2 A_4} \Rightarrow A_4 A_6 = \frac{1}{2} A_2 A_4 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 A_0 A_2$$

$$A_6 = h(A_4) \text{ et } A_8 = h(A_6) \Rightarrow \overline{A_6 A_8} = \frac{1}{2} \overline{A_4 A_6} \Rightarrow A_6 A_8 = \frac{1}{2} A_4 A_6 = \left( \frac{1}{2} \right)^3 A_0 A_2$$

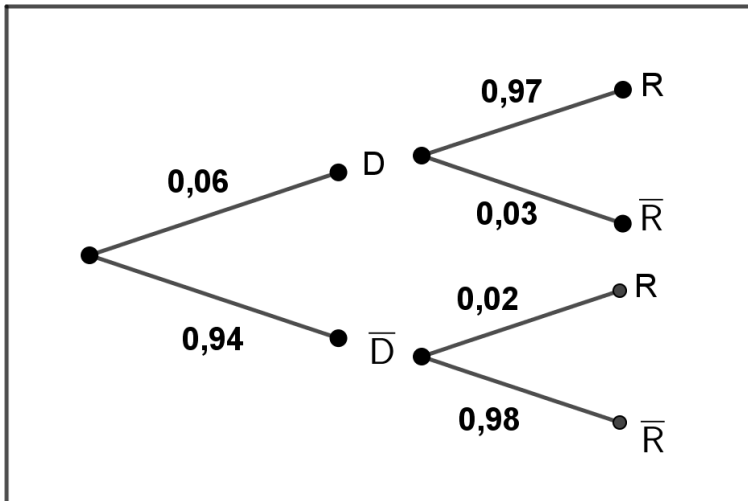
$$\text{En général : } A_{2n-2} A_{2n} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} A_0 A_2$$

$$S_n = A_0 A_2 + A_2 A_4 + A_4 A_6 + \dots + A_{2n-2} A_{2n} = A_0 A_2 + \frac{1}{2} A_0 A_2 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} A_0 A_2$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) A_0 A_2 = \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} A_0 A_2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \times IK = 2\sqrt{5}$$

### Exercice N°3 :

1°)



$$2^\circ) \text{ a) } p(D \cap \bar{R}) = 0,06 \times 0,03 = 0,0018$$

$$\text{b) } p(\bar{D} \cap R) + p(D \cap \bar{R}) \\ = 0,94 \times 0,02 + 0,0018 = 0,0206$$

$$3^\circ) p(\bar{R}) = p(\bar{D} \cap \bar{R}) + p(D \cap \bar{R}) \\ = 0,94 \times 0,98 + 0,0018 = 0,923$$

4°) Soit X l'alea numérique qui pour valeur le nombre de fois où la pièce est acceptée au cours de trois contrôles

X suit une loi binomiale de paramètre  $p = 0,923$  et  $n = 3$

$$p(X = k) = C_3^k (0,923)^k \times (0,077)^{3-k} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{a) } p_1 = p(X = 2) = C_3^2 (0,923)^2 \times (0,077)^{3-2} = 3(0,923)^2 (0,077)$$

$$\text{b) } p_2 = p(X = 1) + p(X = 0) = C_3^1 (0,923)^1 \times (0,077)^{3-1} + C_3^0 \left( (0,923)^0 \times (0,077)^{3-0} \right) \\ = 3(0,923) \times (0,077)^2 + (0,077)^3 = 0,0169$$

### Exercice N°4 :

1°) a)  $\overline{N_{P_1}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{N_{P_2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\frac{3}{4} \neq \frac{-2}{-11} \Rightarrow P_1$  et  $P_2$  sont sécants

b)  $M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-2z=1 \\ 4x-11y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{pour } x=t \in \mathbb{R} \begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow 7t-13y=1 \\ 2z=-4t+11y \end{cases}$

2°) •  $7 \times 2 - 13 \times 1 = 14 - 13 = 1$

•  $7x - 13y = 7 \times 2 - 13 \times 1 \Leftrightarrow 7(x-2) = 13(y-1)$

$\Leftrightarrow 13$  divise  $7(x-2)$  et  $7 \wedge 13 = 1$  donc lemme de Gauss

$13$  divise  $(x-2)$  Ainsi  $x-2 = 13k ; k \in \mathbb{Z}$  par suite  $x = 2 + 13k ; k \in \mathbb{Z}$

\*  $7 \cdot (13k) = 13(y-1) \Leftrightarrow 7k = y-1 \Leftrightarrow y = 1 + 7k ; k \in \mathbb{Z}$

Conclusion :  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2+13k, 1+7k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

3°) a)  $(S) : \begin{cases} 3x-2y-2z=1 \\ 4x-11y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow 7x-13y=1 \\ (2) \Rightarrow 2z=-4x+11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-13y=1 \\ 2z=-4x+11y \end{cases}$

Réciproquement :  $\begin{cases} 7x-13y=1 \\ 2z=-4x+11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-13y=1 \\ 2z+4x-11y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)-(2) \Rightarrow 3x-2y-2z=1 \\ 2z+4x-11y=0 \end{cases}$

(ou bien par équivalence)

3°) b)  $\begin{cases} 7x-13y=1 \\ 2z=-4x+11y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 13k ; y = 1 + 7k$  et  $2z = 3 + 25k ; k = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$

Donc  $M(15+26p, 8+14p, 14+25p) ; p \in \mathbb{Z}^*$

### Exercice N°5 :

1°) a) •  $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et  $u(\mathbb{R}^*) = ]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]-\infty, 0[$  d'où  $g = v \circ u$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$  donc  $g$  est continue en 0

$g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et en 0 d'où elle est continue sur  $\mathbb{R}$

b)  $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$  et  $g(-x) = g(x) \Rightarrow g$  est paire

Donc la courbe  $\zeta$  de  $g$  admet  $(O, \vec{j})$  comme axe de symétrie

2°) a) On pose  $X = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{X} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{X}}, X \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{X}}}\right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{-Xe^X}\right) = 0 \Rightarrow g'_d(0) = 0$$

$\zeta$  admet une demi-tangente horizontale au point  $O$  par raison de symétrie ( $g$  est paire)

$g'(0) = 0$

D'où  $g$  est dérivable en 0

b) •  $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $u(\mathbb{R}^*) = ]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]-\infty, 0[$  d'où  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$

• pour tout  $x \neq 0$  on a :  $g'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{g(x)}{x^3}$

c)  $g$  est paire  $\Rightarrow$  on étudie  $g$  sur  $[0, +\infty[$ ,  $g'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

d)  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$

$$\text{et } f([0, +\infty[) = \left[ f(0), \lim_{+\infty} f \right[ = [0, 1[$$

$\Rightarrow g$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, 1[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

e)  $y \in ]0, +\infty[$ ,  $x \in ]0, 1[$ ,  $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} = \ln x$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2 \ln x} = y^2 \text{ or } g^{-1}(x) = y \in ]0, +\infty[ \text{ et } g(0) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0, 1[ : g^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{2 \ln x}}$$

3°) a) Pour tout  $x \neq 0$  on a :  $g''(x) = \frac{x^3 g'(x) - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{x^3 \frac{g(x)}{x^3} - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{g(x)(1 - 3x^2)}{x^6}$

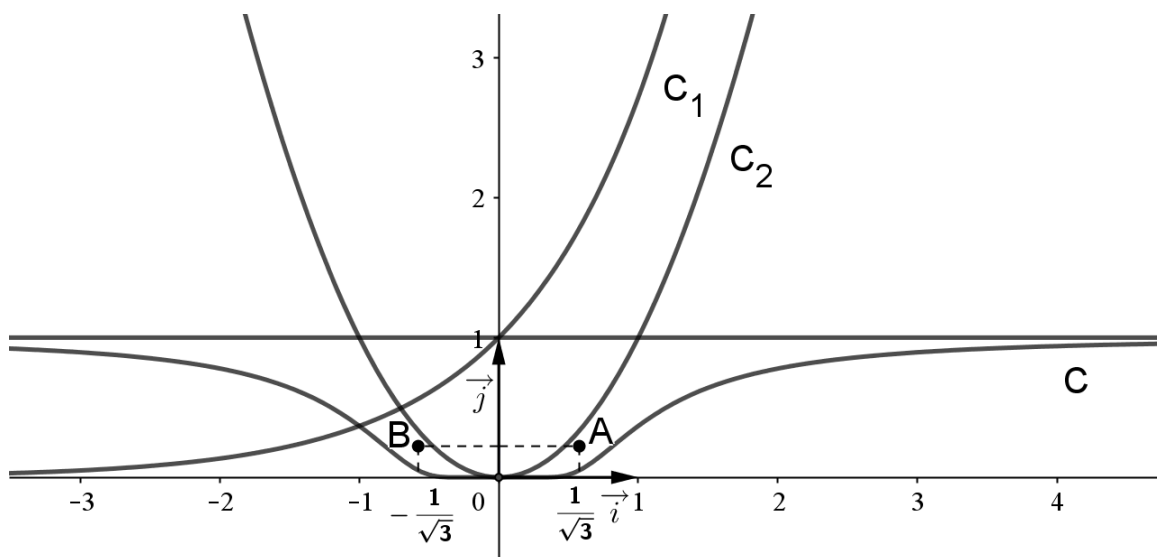
Le signe de  $g''(x)$  est celui de  $(1 - 3x^2)$ , on a  $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ou  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x)$  s'annule deux fois et change de signe donc  $\zeta$  admet deux points

d'inflexions  $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$  et  $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
signe de $g''(x)$	-	○	+	○	-

b)



4°)  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = g^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2g'(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$

5°) a)  $V(n) = \pi \int_0^n f(t) dt = \pi \int_0^n g^2(t) dt \Rightarrow$  comme  $g$  est continue et positive sur  $[0, \pi]$

Alors :  $V(n)$  est le volume (en unité de volume) engendré par rotation de la courbe  $\zeta$  au tour de l'axe des abscisses

$$\begin{aligned} \text{b) } \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt - \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt &= \pi \left( \int_0^n f(t) dt + \int_n^{\sqrt{n}} f(t) dt \right) = \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(t) dt \geq 0 \\ &\Rightarrow V(n) \geq \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \bullet f \text{ est croissante sur } [0, +\infty[ ; t \geq \sqrt{n} \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{n}) \Rightarrow \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt &\geq \pi f(\sqrt{n}) \int_{\sqrt{n}}^n 1 dt \\ &\Rightarrow V(n) \geq \pi f(\sqrt{n})(n - \sqrt{n}) \Rightarrow V(n) \geq \pi \sqrt{n} f(\sqrt{n})(\sqrt{n} - 1) \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{n} f(\sqrt{n})(\sqrt{n} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V(n) = +\infty$$

$$\text{d) Pour tout réel } t \text{ de } [0, +\infty[ , g(t) \leq 1 \Rightarrow f(t) \leq 1 \Rightarrow \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n 1 dt$$

$$\Rightarrow V(n) \leq \pi(n - \sqrt{n}) \leq \pi n$$

$$\text{e) } \pi f(\sqrt{n})(n - \sqrt{n}) \leq V(n) \leq \pi n \Leftrightarrow \pi f(\sqrt{n}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{V(n)}{n} \leq \pi$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\pi f(\sqrt{n})}^1 \left(1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_0\right) = \pi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(n)}{n} = \pi$$