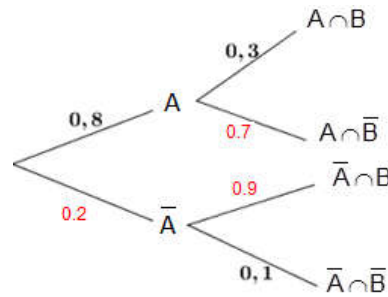


**Exercice 1**

Il suffit de compléter l'arbre de probabilité :

- 1) a) 0.7
- 2) b)  $0.18 = 0.2 \times 0.9$

3) c) 
$$\frac{p(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.9} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$



**Exercice 2**

Le triangle AIC est rectangle en I et  $(\vec{AI}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  car  $(\vec{CA}, \vec{CI}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ , puisque  $I \in [CB]$ .

De plus  $[IE]$  est une médiane dans ce triangle donc  $IE = AE$  donc AIE est équilatéral.

AIE est direct car  $(\vec{AI}, \vec{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

2) a) ABI est un triangle rectangle en I, isocèle et direct donc

$AB = \sqrt{2} AI$  et  $(\vec{AI}, \vec{AB}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$  par la suite  $S(I) = B$ .

•  $S_{\Delta}(E) = I$  alors  $f(E) = S \circ S_{\Delta}(E) = S(I) = B$ .

b) f est la composée d'une similitude directe S de centre A et de rapport  $\sqrt{2}$  et d'une similitude indirecte  $S_{\Delta}$  de rapport 1 et comme  $A \in \Delta$  alors  $f(A) = S \circ S_{\Delta}(A) = A$  ( $f(A) = A$ ) par la suite f est une similitude indirecte de centre A et de rapport  $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ .

c) f o f est une homothétie de centre A et de rapport :  $\sqrt{2}^2 = 2$ .

\*  $\vec{AC} = 2\vec{AE}$  donc  $f \circ f(E) = C$ .

\*  $f \circ f(E) = C$  d'où  $f(f(E)) = C$  or  $f(E) = B$  alors  $f(B) = C$ .

d) \*  $(BJ) \perp (AE)$  et  $f(B) = C$  donc :

f(BJ) est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite  $f(AE) = (AB)$ . D'où  $f(BJ) = (CK)$ .

\*  $J \in (BJ) \cap (AC)$  donc  $f(J) \in f(BJ) \cap f(AC) = (CK) \cap (AB) = \{K\}$ . Ainsi  $f(J) = K$ . ( $f(AC) = f(AE)$ ).

3) a) On a  $g(C) = A$  et  $g(K) = I$ . On note  $B' = g(B)$ .

le triangle KBC est rectangle en K, isocèle et direct donc son image  $IB'A$  par g est un triangle rectangle en I, isocèle et indirect. Or le triangle IBA est rectangle en I, isocèle et indirect. D'où  $B = B'$  et par la suite B est le centre de g.

b)  $g(B) = B$  et  $g(K) = I$  et A appartient à la droite (BK) donc  $D = g(A)$  est un point de la droite (BI).

c)  $g(C) = A$ ,  $g(B) = B$  et  $g(A) = D$ ; g est une similitude indirecte d'où

$$(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv -(\vec{CB}, \vec{CA})[2\pi] \equiv (\vec{CA}, \vec{CB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

On construit un point T tel que  $(\vec{AB}, \vec{AT}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ .

Le point D est l'intersection de la droite (BI) avec la demi-droite  $[AT)$ .

4) a)  $\varphi$  est la composée de deux similitudes indirectes donc c'est une similitude directe.

•  $\varphi(A) = g \circ f(A) = g(A) = D$  et  $\varphi(B) = g \circ f(B) = g(C) = A$ .

b)  $\varphi(A) = D$  et  $\varphi(B) = A$ . Soit  $\theta$  une mesure de l'angle de  $\varphi$ .

$$\theta \equiv \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \right) [2\pi] \equiv \pi + \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right) [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi].$$

5) •  $\varphi(E) = \text{gof}(E) = g(B) = B$ ,  $\varphi(B) = A$  et  $\varphi(A) = D$ . Donc  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ .

•  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$  est la composée de 3 similitudes directes de même centre  $\Omega$  et de même angle  $\frac{7\pi}{6}$  donc c'est une similitude directe de centre  $\Omega$  et d'angle  $3 \times \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

•  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$  donc  $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

b)  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$  et  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J) = F$  donc  $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{DF}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ , donc  $(EJ) \perp (DF)$ .

c) •  $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$  et  $\varphi(J) = g \circ f(J) = g(K) = I$  d'où  $F = \varphi \circ \varphi(I)$

$$\begin{cases} \varphi \circ \varphi(I) = F \\ \varphi \circ \varphi(E) = A \\ \varphi \circ \varphi(B) = D \end{cases} \text{ et comme } IB = IE \text{ alors } FD = FA.$$

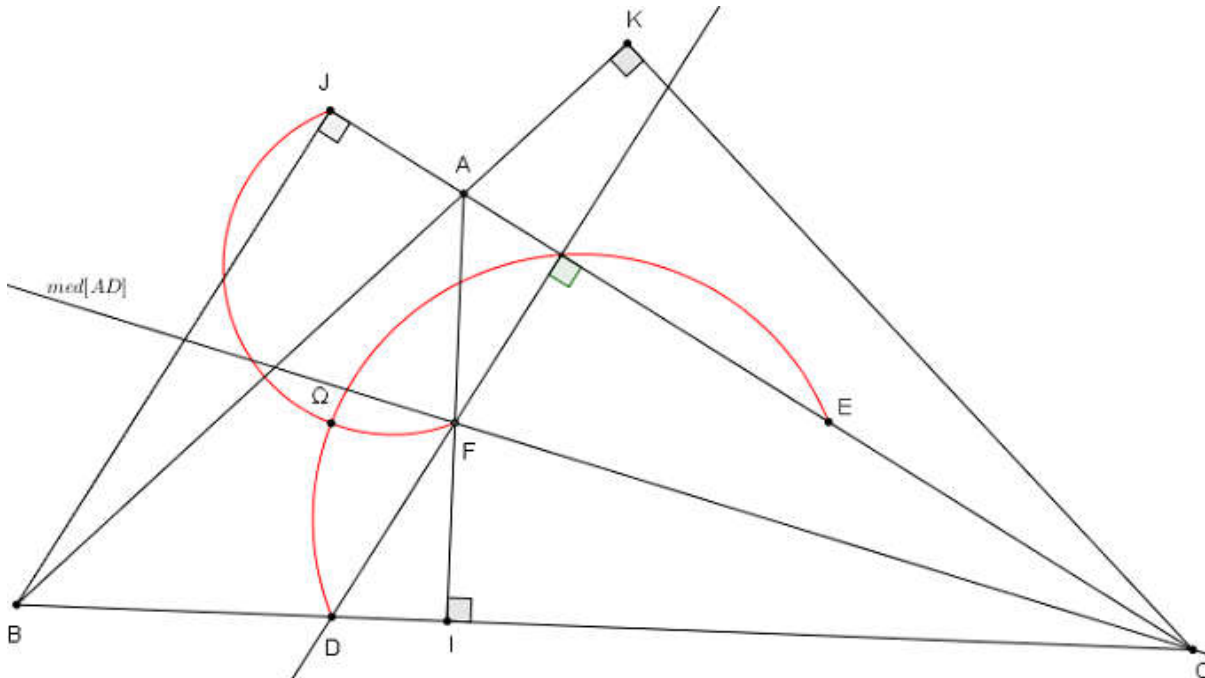
d) • Pour la construction du point D :

On utilise le fait que  $FD = FA$  c'est à dire  $F \in \text{med}[AD]$  et que  $(FD) \perp (JE)$ .

•  $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  donc  $\Omega$  est un point du demi-cercle  $\Gamma_1$  de diamètre  $[ED]$ . Voir figure

$(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  donc  $\Omega$  est un point du demi-cercle  $\Gamma_2$  de diamètre  $[JF]$ . Voir figure

•  $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ .



### Exercice 3

1) a) Il suffit de vérifier que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b)  $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$  donc  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas conjugués.

2) a)  $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

b)  $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2 = (2z_C)^2 - 4 = 4(z_C^2 - 1)$ . Car  $z_2 + z_1 = 2z_C$  et  $z_1z_2 = 1$ .

c)  $\left( \overrightarrow{AB}, \widehat{CI} \right) + \left( \overrightarrow{AB}, \widehat{CJ} \right) \equiv \arg \left( \frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) + \arg \left( \frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) [2\pi] \equiv \arg \left( \frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \cdot \frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) [2\pi]$   
 $\equiv \arg \left( \frac{z_C^2 - 1}{(z_2 - z_1)^2} \right) [2\pi] \equiv \arg \left( \frac{1}{4} \right) [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$

d'où la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{ICJ}$ .

3) a) K est le centre d'un cercle passant par I et J donc K appartient à la médiatrice du segment [IJ].

La médiatrice du segment [IJ] est l'axe des ordonnées.

b)  $\bullet (M \in (C)) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow |z - iy| = |1 - iy| \Leftrightarrow (|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$

$\Leftrightarrow (z - iy)(\bar{z} + iy) = (1 - iy)(1 + iy)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) + y^2 = 1 + y^2$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1$ .

c)  $A \in (C) \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 + iy(z_1 - \bar{z}_1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_2} \frac{1}{z_2} + iy \left( \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2} \right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z_2 \cdot z_2} (1 + iy(\bar{z}_2 - z_2)) = 1 \Leftrightarrow z_2 \bar{z}_2 + iy(z_2 - \bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow B \in (C)$ .

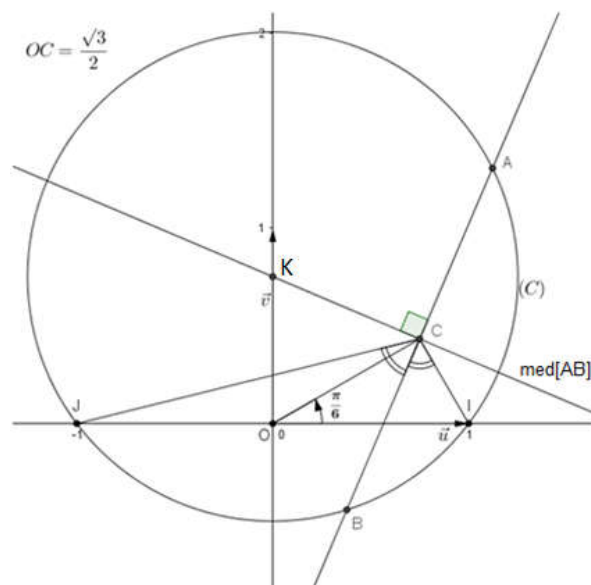
4) a)  $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ , Voir figure.

b) La droite (AB) porte la bissectrice

intérieure de l'angle  $\widehat{ICJ}$ .

La médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire en C à la droite (AB).

c) Les points A et B sont les points d'intersection du cercle (C) avec la droite (AB). ( $OA > OB$  car  $|z_1| > 1$ .)



### Exercice 4

A) 1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$

b) •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x}$ . ( pour  $x > 0$ ,  $f(x) = \ln(x^2) - \ln(x+1) = 2\ln x - \ln(x+1)$ )

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ,

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

La courbe  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de  $(0, \vec{i})$ .

2) a) Pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 2\ln x - \ln(x+1).$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

b) Tableau de variation

x	0	+
	$\infty$	
f'(x)		+
f		$+\infty$

c) La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  donc  $f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[)$ .

De la continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  et des égalités  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$  on déduit que  $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ .

3) a) On trouve  $x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

b)  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  d'où  $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = x''$ .

Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

$$M \in (C_f) \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2}{x+1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = x+1, \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses en un seul point  $A$  d'abscisse  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

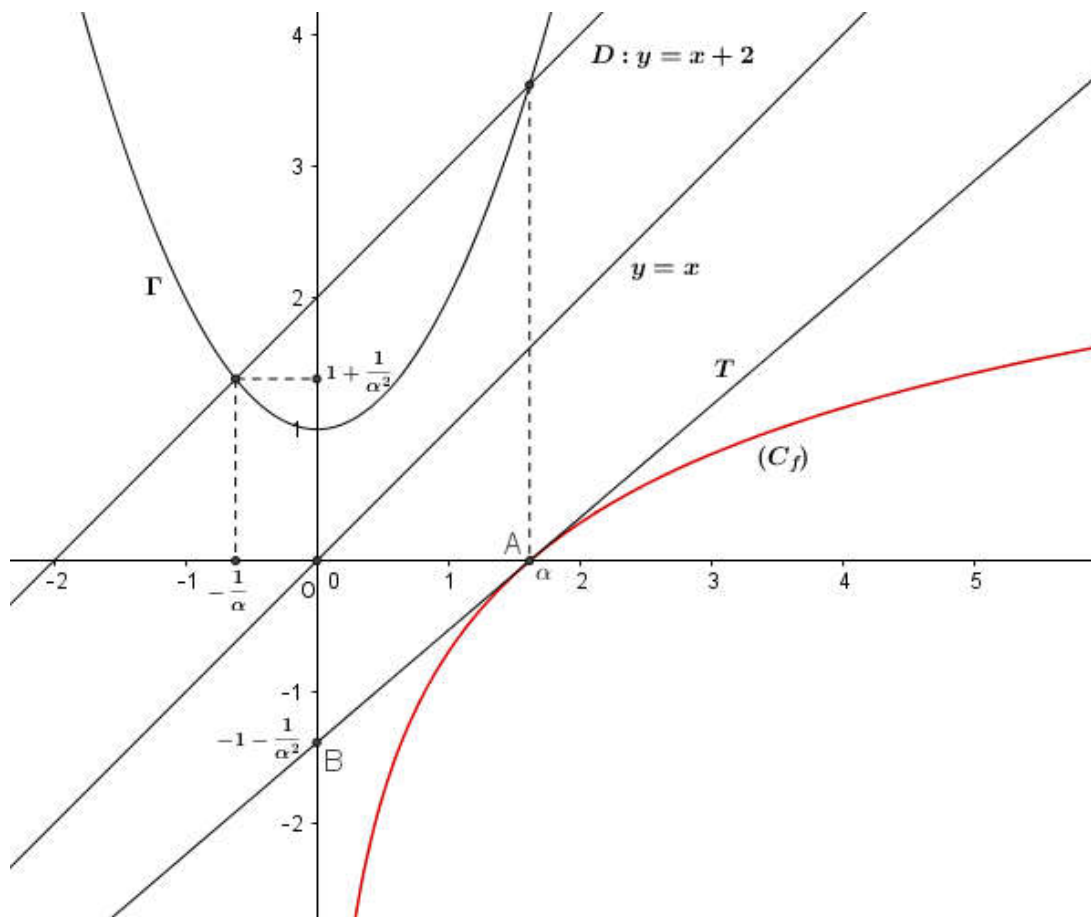
d)  $T: y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ .

$f(\alpha) = 0$  et  $f'(\alpha) = \frac{\alpha + 2}{\alpha(\alpha + 1)} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3}$  puisque  $\alpha^2 = \alpha + 1$ , d'où  $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}$ .

Par la suite  $T: y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)$ .

e)  $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$  et  $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(0 - \alpha) = -1 - \frac{1}{\alpha^2}$  alors  $B \in (T)$ .

4) a) et b)



B) 1) a) Soit  $x \geq 1$  et  $t \in [1, x]$ ,

\*  $1 \leq t \leq x$  et  $n \geq 1$  alors  $1 \leq t^n \leq x^n$  or  $f$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$

donc  $f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$  d'où  $\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) dt \leq \int_1^x f(t^n) dt \leq \int_1^x f(x^n) dt$ .

Donc pour tout  $x \geq 1$ ,  $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x - 1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x - 1)$ .

b)  $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$ . On intègre par parties:

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = f(t^n) \\ v'(t) = 1 \end{cases}, \begin{cases} u'(t) = n t^{n-1} \frac{t^n + 2}{t^n (t^n + 1)} = \frac{n}{t} \frac{t^n + 2}{t^n + 1} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } G_n(x) &= \left[ t f(t^n) \right]_1^x - n \int_1^x \frac{t^n + 2}{t^n + 1} dt = x f(x^n) - f(1) - n \int_1^x \left( 1 + \frac{1}{t^n + 1} \right) dt \\ &= x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{t^n + 1} dt. \end{aligned}$$

Autrement : vérifier l'égalité de deux fonctions (ont la même dérivée et coïncident en 1).

2) a)  $\alpha > 1$  donc  $\sqrt[n]{\alpha} > 1$

$$\text{D'après B)1)a) : } \ln\left(\frac{1}{2}\right) (\sqrt[n]{\alpha} - 1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) (\sqrt[n]{\alpha} - 1).$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 ; (\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln \alpha}) \text{ et } f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{D'après le théorème de comparaison des limites } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln(\alpha)} - 1}{\frac{1}{n} \ln(\alpha)} \cdot \ln(\alpha). \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\alpha) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\text{Par la suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$$

$$\text{d) } J_n = -G_n(\sqrt[n]{\alpha}) + \sqrt[n]{\alpha} f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha} - 1).$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} f(\alpha) = 1 \times 0 = 0$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$