

CORRIGE

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu :** Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul, équation complexe du second degré, forme exponentielle d'un nombre complexe non nul et interprétation géométrique.
- ✓ **Aptitudes visées :** reconnaître une racine $5^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, vérifier une équation complexe, écrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer un lieu géométrique d'un point variable.

✓ Corrigé :

Les choix corrects sont :

1°) Vrai : Si $u^5 = v^5 = 1$ alors $(u.v)^5 = 1$

2°) Vrai : il suffit de faire une vérification.

3°) Faux : Un argument du nombre complexe $z = -5e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $\frac{7\pi}{6}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$

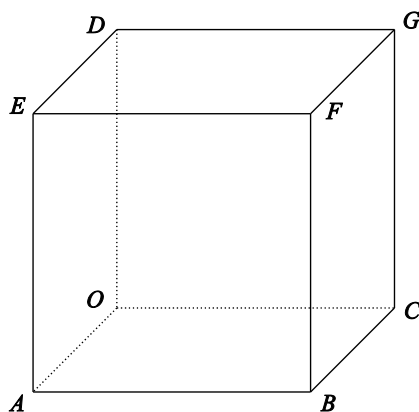
4°) Vrai : θ décrit seulement l'intervalle $[0, \pi]$ (demi-cercle)

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu :** produit vectoriel, équations de droites, plans et sphères de l'espace, positions relatives de plans et sphères.
- ✓ **Aptitudes visées :** calculer un produit vectoriel, déterminer une représentation paramétrique d'une droite et une équation cartésienne d'un plan, reconnaître une à partir de son équation, étudier la position relative d'une sphère et un plan.

✓ Corrigé :

1°) a°)



Dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, on a : $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ et $D(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, par conséquent, $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1°) b°) Le vecteur $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ACD) , d'où :

$$(ACD): x + y + z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

L'écriture $A(1,0,0) \in (ACD) \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$ permet alors de conclure :

$$(ACD): x + y + z - 1 = 0.$$

2°) a°) Le vecteur $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

Le point $O(0,0,0)$ est un point de la droite (Δ) .

Alors $(\Delta) : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} .$

$2^\circ) \text{ b}^\circ) H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (ACD) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = \alpha \\ x_H + y_H + z_H - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = \alpha \\ 3\alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1}{3} \\ y_H = \frac{1}{3} \\ z_H = \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) .$

$3^\circ) \text{ a}^\circ)$ Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_m) : x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mathcal{S}_m) : (x-m)^2 - m^2 + (y-m)^2 - m^2 + (z-m)^2 - m^2 - 1 + 3m^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mathcal{S}_m) : (x-m)^2 + (y-m)^2 + (z-m)^2 &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble (\mathcal{S}_m) est une sphère de centre $I_m(m, m, m)$ et de rayon $R=1$.

$3^\circ) \text{ b}^\circ)$ (\mathcal{S}_m) passe par le point $A \Leftrightarrow A(1, 0, 0) \in (\mathcal{S}_m)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (1-m)^2 + (0-m)^2 + (0-m)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3m^2 - 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow m = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad m = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$4^\circ) \text{ a}^\circ)$ On a : $I_0(0, 0, 0) \in (\Delta)$.

On a : $I_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \in (\Delta)$.

En fait : Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $I_m(m, m, m) \in (\Delta)$: Les sphères (\mathcal{S}_m) sont, toutes, centrées sur (Δ) .

$4^\circ) \text{ b}^\circ)$ Plusieurs méthodes sont possibles :

Méthode 1 :

Toutes les sphères (\mathcal{S}_m) étant centrées sur la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ACD) , le projeté orthogonal H de leurs centres I_m sur le plan (ACD) est le même, à savoir $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (déterminé à la question $2^\circ) \text{ b}^\circ)$.

En particulier, les deux sphères (\mathcal{S}_0) et $(\mathcal{S}_{\frac{2}{3}})$, de même rayons $R_0 = R_{\frac{2}{3}} = 1$ coupent le plan (ACD) puisque le point $A \in (ACD)$ appartient également, selon $3^\circ) \text{ b}^\circ)$, aux deux sphères (\mathcal{S}_0) et $(\mathcal{S}_{\frac{2}{3}})$,

suisant un même cercle (\mathcal{C}) de centre $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon $HA = \dots = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Méthode 2 :

On a :
$$\begin{cases} (\mathcal{S}_0) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (\mathcal{S}_{\frac{2}{3}}) : \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Comme les trois points $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ et $D(0, 0, 1)$ appartiennent, tous les trois, aussi bien à la sphère (\mathcal{S}_0) qu'à la sphère $(\mathcal{S}_{\frac{2}{3}})$ (aisément vérifiable), ces deux dernières se coupent

alors suivant un même cercle, à savoir, le cercle (\mathcal{C}) circonscrit au triangle ABC .

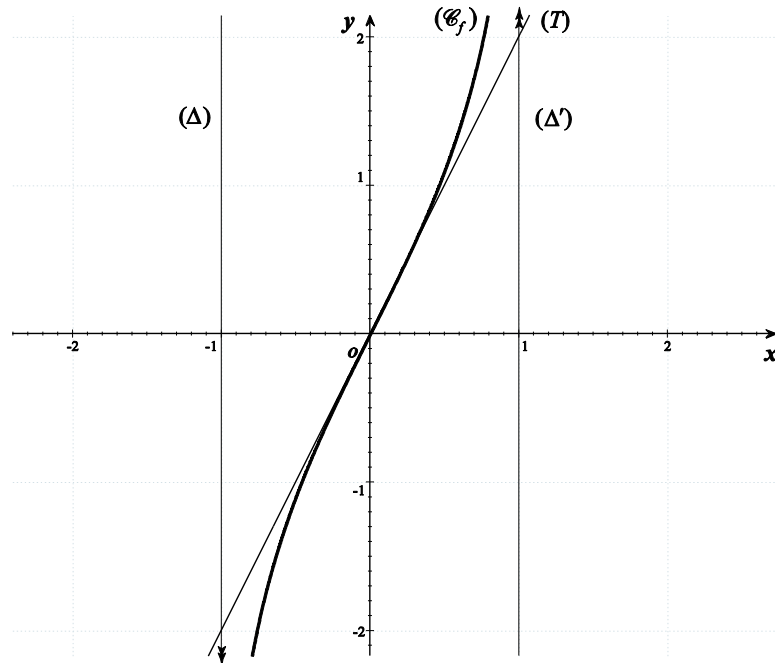
Exercice 3 :

✓ **Contenu** : Etude de fonctions , fonction réciproque, courbe d'une fonction, calcul intégral, calcul d'aire.

✓ **Aptitudes visées** : lire graphiquement une courbe, déterminer la réciproque d'une fonction bijective et construire sa courbe, calculer une aire.

✓ **Corrigé** :

1°)



$f(0) = 0$: lecture graphique immédiate sur la courbe (\mathcal{C}_f) .

$f'(0) = 2$: lecture graphique de la pente de la droite (T) , tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point O

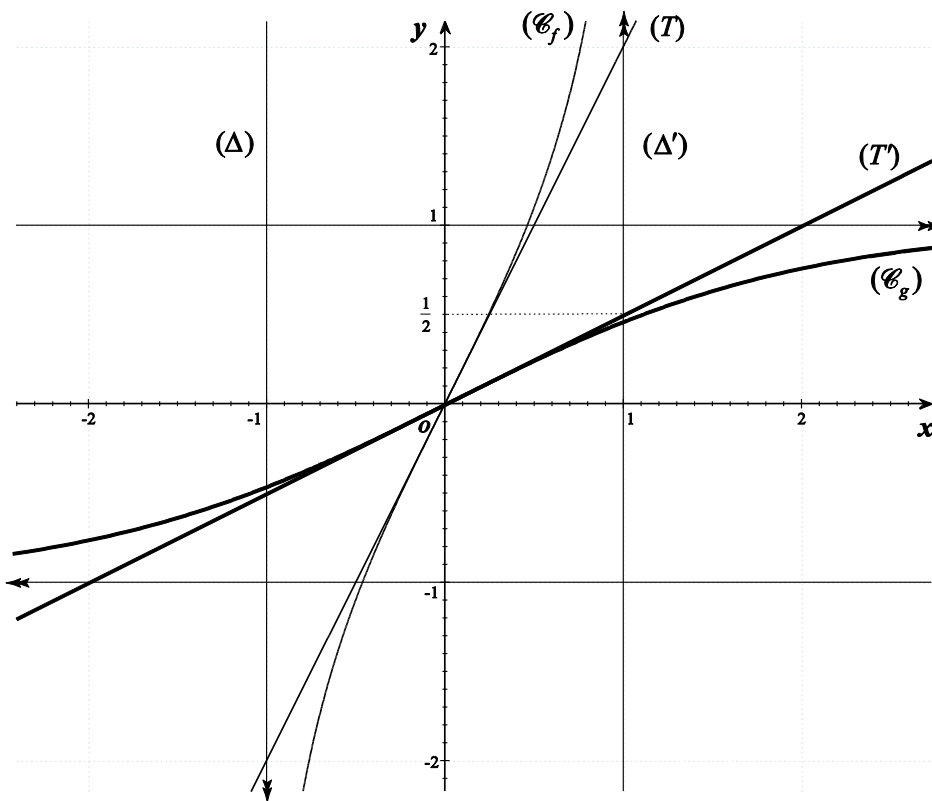
2°) a°) $g(0) = 0$: g étant la fonction réciproque de f , on a l'équivalence

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x .$$

$$g'(0) = \frac{1}{2} \quad : \text{ formule de dérivée d'une réciproque : } g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} .$$

2°) b°) Le tracé est jugé sur la présence des quatre éléments suivant :

- Tracé correct de deux asymptotes horizontales d'équations cartésiennes $y = 1$ et $y = -1$
- Tracé correct d'une droite (T) tangente à (\mathcal{C}_g) au point O , de pente $\frac{1}{2}$.
- Tracé correct de l'allure de (\mathcal{C}_g)



3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{e^x(e^x+b) - e^x(e^x+a)}{(e^x+b)^2} = \frac{(b-a)e^x}{(e^x+b)^2}$.

D'après les résultats établis en 2°) a°) on a :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+a}{1+b} = 0 \\ \frac{b-a}{(1+b)^2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a = 0 \\ 2(b-a) = (1+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2(b+1) = (1+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Enfin , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

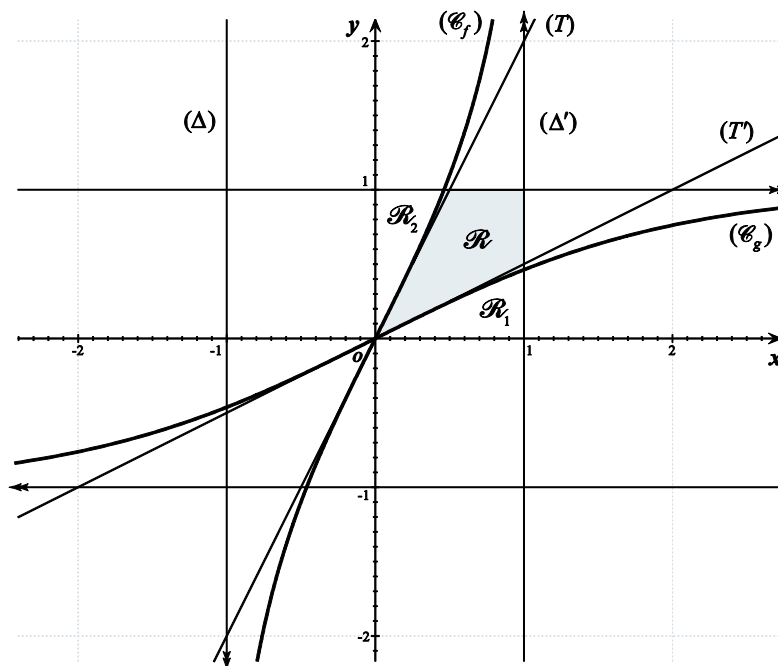
Note : Méthode alternative : Une autre mise en équation est possible : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+a}{1+b} = 0 \\ \frac{a}{b} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$

4°) a°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

$$\begin{aligned} 4°) \text{ b°) } \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx \quad , \text{ d'après 4°) a°) } . \\ &= \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 - \left[-\ln(e^{-x} + 1) \right]_0^1 = \left[\ln(e^x + 1) + \ln(e^{-x} + 1) \right]_0^1 = \left[\ln(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) - x \right]_0^1 \\ &= \left[2\ln(e^x + 1) - x \right]_0^1 = 2\ln(e+1) - 1 - 2\ln 2 \\ &= 2\ln(e+1) - 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Note : Plusieurs autres résultats finaux sont possibles .

5°) a°) L'aire \mathcal{A} demandé est celle de la région \mathcal{R} du plan, décrite dans l'énoncé, et hachurée dans la figure suivante :



L'aire \mathcal{A} de cette région \mathcal{R} , est celle du carré unité, duquel on soustrait les deux aires des deux régions \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 définies par :

\mathcal{R}_1 : domaine limité par les droites d'équations respectives $y=0$ et $x=1$ et la courbe (\mathcal{C}_g) .

\mathcal{R}_2 : domaine limité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$ et la courbe (\mathcal{C}_f) .

On a ainsi : $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = 1 - [\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_2)]$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on a : $\mathcal{A}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = \int_0^1 g(x) dx$.

On en déduit alors que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) = 1 - 2\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = 1 - 2\int_0^1 g(x) dx$.

5°) b°) On a : $\mathcal{A} = 1 - 2\int_0^1 g(x) dx = 1 - 2[2\ln(e+1) - 2\ln 2 - 1] = 3 + 4\ln 2 - 4\ln(e+1)$ (ua)

Exercice 4 :

✓ **Contenu** : suites réelles, raisonnement par récurrence, suites adjacentes, convergence d'une suite, limite d'une suite.

✓ **Aptitudes visées** : montrer une proposition par récurrence, montrer que deux suites sont adjacentes, déterminer la limite d'une suite.

✓ **Corrigé** :

1°) a°) On a : $t_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.

On a : $t_1 = v_1 - u_1 = [(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0] - [\alpha u_0 + (1-\alpha)v_0] = 1 - \alpha + 2\alpha - \alpha - 2(1-\alpha) = 2\alpha - 1$.

1°) b°) Deux approches peuvent être adoptées :

Méthode 1 : (Utilisation du principe de raisonnement par récurrence) :

• Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $t_0 = 1 = (2\alpha - 1)^0$, ($\alpha \neq \frac{1}{2}$).

• Preuve de l'hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$, un entier naturel quelconque.

Supposons que $t_p = (2\alpha - 1)^p$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que $t_{p+1} = (2\alpha - 1)^{p+1}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } t_{p+1} &= v_{p+1} - u_{p+1} = [(1-\alpha)u_p + \alpha v_p] - [\alpha u_p + (1-\alpha)v_p] = (1-2\alpha)u_p + (2\alpha-1)v_p \\ &= (2\alpha-1)(v_p - u_p) = (2\alpha-1)t_p = (2\alpha-1)(2\alpha-1)^p \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\ &= (2\alpha-1)^{p+1} \end{aligned}$$

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = (2\alpha - 1)^n$

Méthode 2 : (Utilisation des suites géométriques) :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, t_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] = (1-2\alpha)u_n + (2\alpha-1)v_n \\ &= (2\alpha-1)(v_n - u_n) = (2\alpha-1)t_n \end{aligned}$$

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi une suite géométrique de premier terme $t_0 = 1$ et de raison $q = 2\alpha - 1$.

Son terme général t_n s'écrit alors : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 q^n = (2\alpha - 1)^n$.

1°) c°) Le réel α vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ou encore $(2\alpha - 1) \in]0, 1[$.

Par conséquent on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\alpha - 1)^n = 0$, puisque $(2\alpha - 1) \in]-1, 1[$.

2°) a°) Etudions le signe de $u_n - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -t_n = -(2\alpha - 1)^n \leq 0$ puisque $2\alpha - 1 > 0$.

On en déduit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 0 \Leftrightarrow u_n \leq v_n$

2°) b°)

■ Sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] - u_n = (1-\alpha)(v_n - u_n) = (1-\alpha)t_n \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors croissante.

■ Sens de variation de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - v_n = (\alpha-1)(v_n - u_n) = (\alpha-1)t_n \leq 0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors décroissante.

2°) c°) Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$

Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont ainsi adjacentes et convergent, par conséquent, vers une même limite ℓ .

2°) d°)

■ Montrons que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3$.

Deux approches peuvent être adoptées :

Méthode 1 : (Utilisation du principe de raisonnement par récurrence) :

• Initialisation :

$$\text{Pour } n = 0, \text{ on a : } u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$$

• Preuve de l'hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$, un entier naturel quelconque.

Supposons que $u_p + v_p = 3$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, $u_{p+1} + v_{p+1} = 3$

$$u_{p+1} + v_{p+1} = [(1-\alpha)u_p + \alpha v_p] - [\alpha u_p + (1-\alpha)v_p] = u_p + v_p = 3 \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence})$$

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3$

Méthode 2 : (Utilisation de suites constantes) :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + v_{n+1} = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] + [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] = u_n + v_n$$

La suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi constante, et on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 3$

■ Déduisons la valeur de la limite commune ℓ .

Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergentes et convergeant vers une même limite ℓ , on a,

$$\text{par passage à la limite dans la relation } u_n + v_n = 3 : \quad 2\ell = 3 \Leftrightarrow \ell = \frac{3}{2} .$$