REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE :** 3h **COEFFICIENT :** 3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

1) Si u et v sont deux racines cinquième de l'unité, alors u.v est aussi une racine cinquième de l'unité.

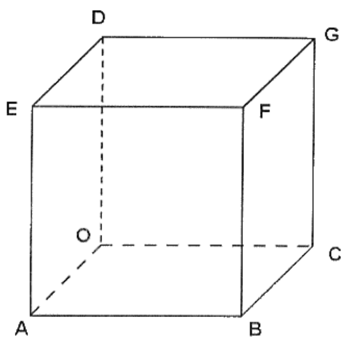
2) $1 + i\sqrt{2009}$ est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 2010 = 0$.

3) Un argument du nombre complexe $z = -5e^{\frac{i\pi}{6}}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = 3e^{i\theta}$, où θ décrit l'intervalle $[0, \pi]$, est un demi-cercle.

Exercice 2 (6 points)

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.



1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et du plan (ACD).

3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$

   a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon r .
   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.

4) a) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points de la droite Δ.

   b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera .

Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur $]-1\ ,\ 1\ [$. Les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont les asymptotes à $(\mathscr{C})$. La droite (T) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

1) En utilisant le graphique déterminer f(0) et f '(0).

2) Soit g la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Déterminer g(0) et g'(0).

   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$.

3) Sachant que l'expression de g est de la forme $g(x) = \dfrac{e^x + a}{e^x + b}$, montrer en utilisant ce qui précède que $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) a) Vérifier que $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b) Calculer alors $\int_0^1 g(x)dx$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

   a) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - 2\int_0^1 g(x)dx$.

   b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice 4 (5 points)

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$; $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \alpha\, u_n + (1-\alpha)\, v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha)\, u_n + \alpha\, v_n$

où α est un réel donné tel que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

1) Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = v_n - u_n$.

   a) Calculer t_0 et t_1.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_n = (2\alpha - 1)^n$.

   c) En déduire la limite de t_n.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.

   d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de la limite ℓ.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE