

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION
DE CONTRÔLE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3h

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) Le nombre $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.
- 2) Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 - 6z - 7 + i = 0$ sont $1 + 2i$ et $-1 + 3i$.
- 3) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Si $\arg(z') \equiv -\arg(z) [2\pi]$ alors $z' = \bar{z}$.

- 4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^8$ est $2^8 e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$.

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.
b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
- 2) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur \vec{k} et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur \vec{j} .
a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ' .
b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$.
- 3) Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O .
a) Vérifier que (S) passe par les points A , B et C .
b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 3 (6 points)

I – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) En déduire que pour tout réel x , $e^x - x \geq 1$.

II – Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe

C_g d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe C_g .

La courbe C_g admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.

1) a) Déterminer $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^{g(x)}$ et soit C_h sa courbe représentative.

a) Calculer $h(1)$, $h(2)$ et $h(3)$.

b) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

c) En écrivant $\frac{h(x)}{x} = \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{x}$, pour $x > 2$, montrer que la courbe C_h admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) .

d) Dresser le tableau de variation de h .

3) Soit $\alpha > 0$.

On note M et N les points des courbes C_g et C_h d'abscisse α .

a) Calculer la distance MN en fonction de $g(\alpha)$.

b) Montrer que la distance MN est minimale lorsque $\alpha = 2$.

4) Tracer la courbe C_h dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 4 (5 points)

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle $[a, a+1]$.

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$.

b) Dédire que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$. (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer, en utilisant (1), que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{S_n}$.

3) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

