Section: Sciences Expérimentales *Session de contrôle 2012*

Matière : Mathématiques

<u>Exercice 1</u> (3 points)

- **Contenu :** Nombres complexes.
- **Aptitudes visées :** Vérifier une racine 5ème d'un nombre complexe non nul, interpréter géométriquement un nombre complexe (milieu d'un segment), exploiter les solutions d'une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- **Corrigé :**

1) Faux : $(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}})^5 = 4\sqrt{2}e^{i\pi} = -4\sqrt{2}$.

2) Faux : $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ donc $z_B = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$.

3) Vrai : si P est le milieu de [MN] alors $z_P = \frac{z_M+z_N}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right) \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 2</u> (5 points)

- **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation cartésienne d'un plan, représentation paramétrique d'une droite, section d'une sphère par un plan, position relative de deux droites.
- **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la position relative d'une droite et un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan.
- **Corrigé :**

1) I(1,2,0) et J(0,2,2)

2) a) Soit M(x,y,z) un point de l'espace.

M∈P signifie $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-2)^2+(z-2)^2$ signifie 2x-4z+ 3=0

Ainsi P : 2x-4z+ 3=0

Autrement: comme P est le plan médiateur du segment [IJ], alors $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan P et par suite une équation de P est de la forme –x+2z+d=0, d est un réel.

Le milieu du segment [IJ] est un point de P alors d= $-\frac{3}{2}$ et par conséquent P : 2x-4z+3=0

b) M(x,y,z) ∈ (OC)∩P signifie "il existe un réel α tel que $\begin{cases} x = 0, y = 0, z = \alpha \\ 2x - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ signifie

(x,y,z) = $(0,0,\frac{3}{4})$ et par suite $(OC) \cap P = \{K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)\}$

3) a) (S) : $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{4}\right)^2 = (\frac{\sqrt{89}}{4})^2$ alors (S) est la sphère de centre $K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{4}$.

b) $1^2+2^2-5=0$ alors $I \in (S)$, $2^2+2^2-\left(\frac{3}{2}\right) \times 2 - 5 = 0$ alors $J \in (S)$.

c) Si (S') est une sphère de centre $\Omega \in (OC)$ et passant par I et J alors $\Omega I = \Omega J$ d'où $\Omega \in P$, par conséquent $\Omega = K$ qui est le seul point d'intersection de P et (OC) et par suite (S')=(S).

4) L'intersection du plan P et la sphère (S) est le cercle de centre $K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{4}$.

<u>Exercice 3</u> (3 points)

- **Contenu :** Série statistique double.
- **Aptitudes visées :** Représenter un nuage de points, justifier un ajustement affine, calculer et interpréter le coefficient de corrélation, déterminer une équation de la droite de régression et l'interpréter pour donner une estimation.
- **Corrigé :**

1) a) $r \simeq -0.998$. Un justement affine est justifiée.

b)T = (-9756.68)B+(26390.938)

2) Pour A= 6.8, T= (-9756.68)(ln6.8)+(26390.938)=7688 (estimation de l'âge en années).

Une estimation de l'année de la chute est 5688 A-J

Exercice 4 **(6 points)**

- **Contenu :** Fonctions numériques, limites, continuité, dérivabilité, variation, branches infinies, courbe.
- **Aptitudes visées :** Lire un graphique, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, identifier les branches infinies d'une courbe, étudier la position relative d'une courbe et son asymptote, tracer la courbe d'une fonction réciproque
- **Corrigé :**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+xe^{-x}+2e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1.$ (traçage de l'asymptote : voir graphique)

2) a) $x+2-\frac{xe^{x}+e^{x}}{e^{x}+1} = \frac{(e^{x}+1)(x+2)-xe^{x}-e^{x}}{e^{x}+1} = f(x).$

b)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left(\frac{xe^{x}+e^{x}}{e^{x}+1}\right) = 0.$ La droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote à C_f en $-\infty$.

c) le signe de $f(x)-(x+2)$ est celui de $-(x+1)$.

Sur $]-\infty, -1]$, C_f est au dessus de Δ.

Sur $[-1,+\infty[$, C_f est au dessous de Δ.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(e^{x}+1)(e^{x}+1)-e^{x}(e^{x}+x+2)}{(e^{x}+1)^{2}} = \frac{1-xe^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}.$

4) a) $f'(0) = \frac{1}{4}$ donc $\alpha \neq 0$.

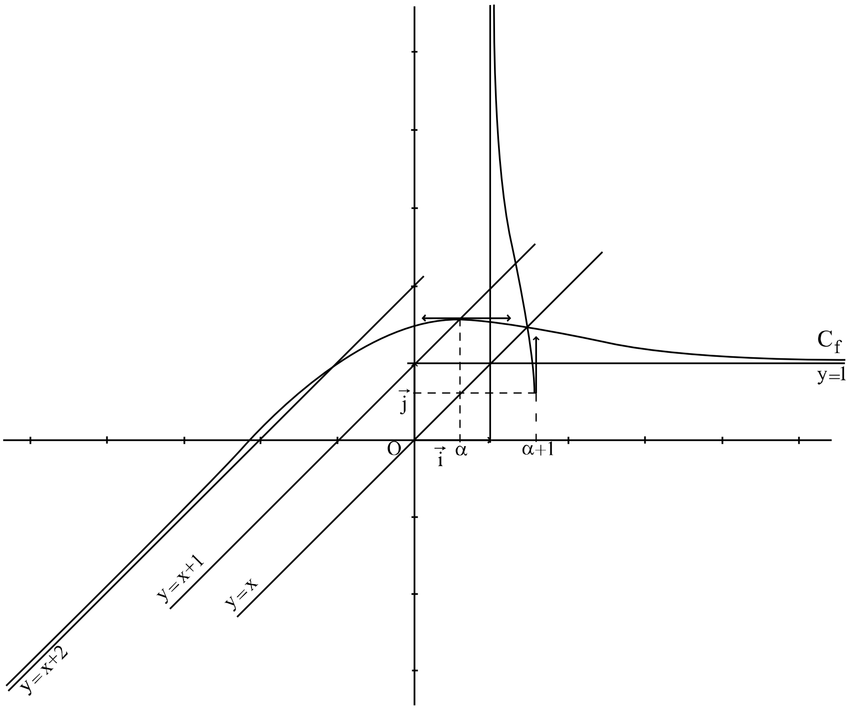
b) $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1-\alpha e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}+\alpha+2}{e^{\alpha}+1} = \frac{\frac{1}{\alpha}+\alpha+2}{\frac{1}{\alpha}+1} = \frac{(\alpha+1)^{2}}{\alpha+1} = \alpha+1$

c) $A \in C_f \cap \Delta'$ avec $\Delta' : y = x+1$. La tangente à C_f en A est parallèle à (x'x).

5) a) h est strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[\alpha, +\infty[$ sur son image par h.

Comme h est continue sur $[\alpha, +\infty[$ alors $h([\alpha, +\infty[) =]1, \alpha+1]$.

b)



<u>Exercice 5</u> (3 points)

- ✓ **Contenu :** Calcul des volumes de solides de révolution.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer le volume d'un solide de révolution.
- ✓ **Corrigé :**

1) $v_1 = \pi\int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \pi\frac{a^2}{2}$

2) $v_2 = \pi\int_0^a (\sqrt{x-\sin x})^2 dx = \pi\int_0^a x dx - \pi\int_0^a \sin x dx = v_1 + \pi[\cos x - 1]_0^a$

$v_2 = v_1 + \pi(\cos x - 1)$

3) a) $v_2 - v_1 = \pi(\cos x - 1)$ et $\cos a \leq 1$ donc $v_2 \leq v_1$ pour tout $a \in]0;4\pi]$.

b) $v_2 = v_1 \Leftrightarrow \pi(\cos a - 1) = 0$ et $a \in]0;4\pi] \Leftrightarrow a = 2\pi$ ou $a = 4\pi$.