Section : **Sciences expérimentales**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Corrigé

Exercice 1

1) a) $F(1,0,1),\ G(1,1,1),\ I\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ et $J\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est directeur de la droite (IJ) et le point I de coordonnées $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, il en résulte qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases}x=0\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \alpha\in\mathbb{R}.\\ z=\alpha\end{cases}$

2) a) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \alpha\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{k}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\alpha\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \alpha\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}=\begin{vmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \alpha\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & \alpha\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{k}=\alpha\vec{i}+\vec{k}.$

b) $A_{AFM}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}$ et $A_{BCM}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}$, il en résulte que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}=\alpha$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG}=1.$

b) (M, A, F et G sont coplanaires) $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AG}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG}=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

$\Leftrightarrow M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\Leftrightarrow$ (M et I sont confondus).

c) Pour

$\alpha\neq 0,\ V_{AFMG}=V_{BCMG}\Leftrightarrow\left|\left(\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG}\right|=\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG}\right|\Leftrightarrow|\alpha|=1\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ou } \alpha=-1$

$$\Leftrightarrow M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=J \text{ ou } M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right).$$

Exercice 2

1) $p(A)=\frac{9}{30}=0,3.$

2) a) $p\left(\overline{B}\,|\,A\right)=0,65$ et $p\left(B\,|\,A\right)=1-p\left(\overline{B}\,|\,A\right)=0,35.$

b) $p\left(B\,|\,\overline{A}\right)=0,04$ et $p\left(\overline{B}\,|\,\overline{A}\right)=1-p\left(B\,|\,\overline{A}\right)=0,96.$

c) $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ donc

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p(B \mid A) \times p(A) + p(B|\overline{A}) \times p(\overline{A}) = 0{,}133.$$

3) Le nombre d'élèves consommateurs de drogues dans une classe de 30 élèves après la fin de la session est $0{,}133 \times 30 = 3{,}99.$ Soit 4 élèves.

Exercice 3

1) a) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = -\sin x.$

b) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = -\sin x \leq 0$ $\left(f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\right)$. Ainsi f est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = [0,1].$

2) a) La fonction f est strictement décroissante et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = -\sin x \neq 0$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que g est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1[$.

b) Pour tout

$x \in [0,1[$ et $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{1}{\sin y}$ avec $f(y) = x \Leftrightarrow \cos y = x$

$\Leftrightarrow \cos^2 y = x^2 \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{1-x^2}$ car $\sin y > 0$ ($y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$).

Il en résulte que pour tout $x \in [0,1[$, $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

3) a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g'(x)dx = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$

Exercice 4

1) a) Le signe de $f(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		α	$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$

Le signe de $g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		β	$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$

b) $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ et $g(\beta)=0 \Leftrightarrow e^{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x-\ln x=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$.

c) $h(\alpha)=e^{\alpha}-\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}-\ln\alpha=-g(\alpha)$.

d) La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[, h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}=f(x)$.

Le signe de $h'(x)$ est celui de $f(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
h	||	$+\infty$ ↘	$h(\alpha)$	↗ $+\infty$	

3) a) Pour tout $x\in]0,+\infty[, f(x)-h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-e^x+\ln x=\ln x-\dfrac{1}{x}=g(x)$.

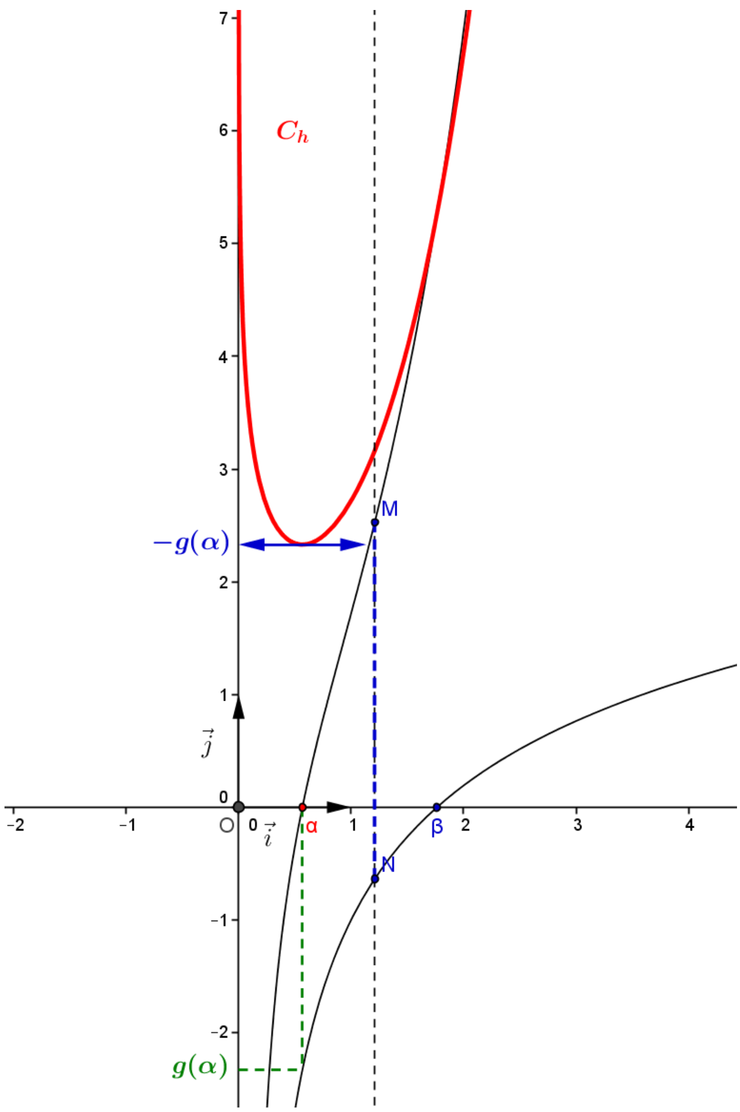
b) Le signe de $f(x)-h(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		β		$+\infty$
$f(x)-h(x)$	||	$-$	0	$+$	
Position	||	C_f est au dessous de C_h		C_f est au dessus de C_h	

c) Voir figure.

4) Pour $a>0$, $MN=\left|f(a)-g(a)\right|=\left|h(a)\right|=h(a)$ car la fonction h est positive.

La distance MN est minimale si et seulement si $h(a)$ est minimale si et seulement si $a=\alpha$ (D'après 2)d)).



C_h
$-g(\alpha)$
$g(\alpha)$
M
N
O
α
β
$\vec{i}$
$\vec{j}$
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7