

# Session de contrôle Bac 2014

## Section : Sc Expérimentales

### Exercice 1

1)  $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$  donc  $(S)$  est la sphère de centre  $I(1, -1, 0)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

2) a)  $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$

b)  $M(x, y, z) \in (S) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ t^2 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$  or l'équation

$t^2 - 2t + 4 = 0$  n'a pas de solution car  $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 > 0$  donc  $\Delta \cap (S) = \emptyset$ .

3) a)  $B \notin \Delta$  donc  $B$  et  $\Delta$  déterminent un plan  $P$ .

b)  $0+0+3-3=0$  donc le point  $A$  appartient au plan d'équation  $x+y+z-3=0$ .

$3+0+0-3=0$  donc le point  $B$  appartient au plan d'équation  $x+y+z-3=0$ .

Soit  $C(1, -1, 3)$  un point de  $\Delta$  différent de  $A$  et  $1-1+3-3=0$  donc le point  $C$  appartient au plan d'équation  $x+y+z-3=0$  et puisque les points  $A, B$  et  $C$  déterminent le plan  $P$  donc  $P$  a pour équation  $x+y+z-3=0$ .

c)  $d(I, P) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$  donc  $P$  et  $S$  sont tangents en  $H$ , projeté orthogonal de  $I$  sur  $P$ .

Soit  $D$  la droite perpendiculaire à  $P$  passant par  $I$  donc  $D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

$H(x, y, z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ 3\alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ , il en résulte que  $H(2, 0, 1)$ .

### Exercice 2

1) a)  $\Delta = 2(1-i)^2 + 16i = 12i = 6(1+i)^2$ .

b)  $\Delta = 6(1+i)^2$ , soit  $\delta = \sqrt{6}(1+i)$ ,  $z' = \frac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{6}(1+i)}{4} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$  et

$z'' = \frac{\sqrt{2}(1-i) - \sqrt{6}(1+i)}{4} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}$ .

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}, \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \right\}.$$

2) a)  $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

b)  $2 \left( e^{-i\frac{\pi}{4}z} \right)^2 - \sqrt{2}(1 - i) \left( e^{-i\frac{\pi}{4}z} \right) - 2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}z^2} - 2e^{-i\frac{\pi}{2}z} - 2i = -2iz^2 + 2iz - 2i = -2i(z^2 - z + 1)$ .

c)  $\left( e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 1 = 0$ ,

$\left( e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 1 = 0$  et l'équation  $z^2 - z + 1 = 0$  est une

équation de second degré dans  $\mathbb{C}$  donc  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$  et  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  sont les solutions de l'équation  $z^2 - z + 1 = 0$ .

d) D'après 2)b)  $z$  est une solution de l'équation  $z^2 - z + 1 = 0$  si et seulement si  $e^{-i\frac{\pi}{4}z}$  est une solution de (E) et puisque  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$  et  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  sont les solutions de l'équation  $z^2 - z + 1 = 0$ , on en déduit que

les solutions de (E) sont  $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}z} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$  et  $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}z} = e^{i\frac{\pi}{12}}$  et comme

$\operatorname{Re} \left( e^{i\frac{\pi}{12}} \right) > 0$  et  $\operatorname{Im} \left( e^{i\frac{\pi}{12}} \right) > 0$  donc  $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$  par suite

$\cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \right) = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$ .

### Exercice 3

1) a)  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.1.

La loi de  $X$  est donnée par  $p(X = k) = C_{20}^k (0.1)^k (0.9)^{20-k}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 20\}$ .

$p(A) = p(X = 0) = (0.9)^{20}$ .

b)  $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p(A) = 1 - (0.9)^{20}$ .

c) Le nombre moyen des vaches qui sont atteintes par la maladie est  $E(X) = 20 \times 0.1 = 2$ .

2) a) les valeurs prises par  $Y$  sont  $\{1, 21\}$ .

$p(Y = 1) = p(A) = (0.9)^{20}$ .

La loi de  $Y$  est donnée dans le tableau suivant :

$p(Y = 21) = p(B) = 1 - (0.9)^{20}$ .

$y_i$	1	21
$p(Y = y_i)$	$(0.9)^{20}$	$1 - (0.9)^{20}$

b)  $E(Y) = \sum_{i=1}^2 y_i p(Y = y_i) = 1 \times (0.9)^{20} + 21 \times (1 - (0.9)^{20}) = 18.56$ .

### Exercice 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

1) a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Graphiquement :  $(C_f)$  admet une branche parabolique infinie de direction celle de  $(O, \vec{i})$  en  $+\infty$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \left(1 - \frac{x-1}{x \ln x}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x-1}{x \ln x}\right) = -\infty.$$

2) a)  $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur } ]0, +\infty[ \\ x \mapsto \frac{x-1}{x} \text{ est dérivable sur } ]0, +\infty[ \end{array} \right.$ , il en résulte que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\text{Pour tout } x \in ]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

b) Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $x-1$  ( $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ )

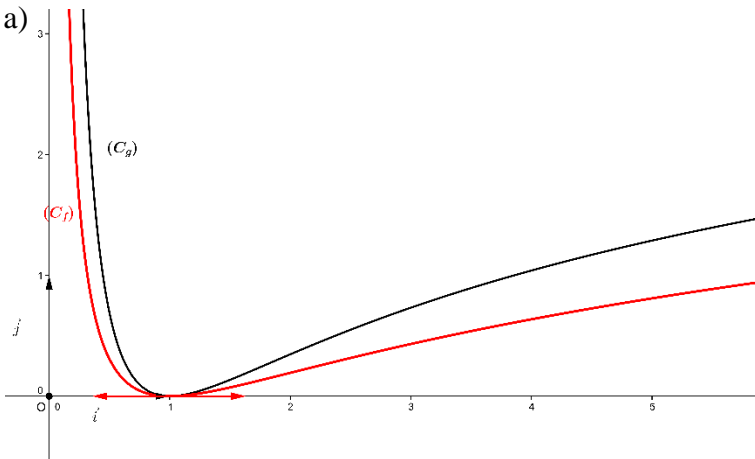
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3) a) La fonction  $g - f$  admet un minimum global sur  $]0, +\infty[$  égal à 0 donc pour tout

réel  $x \in ]0, +\infty[, g(x) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$ . Il en résulte que  $(C_g)$  est au-dessus de  $(C_f)$ .

b)  $M(a, f(a))$  et  $N(a, g(a))$  donc  $MN^2 = (g(a) - f(a))^2$ , or  $a > 1$  donc  $0 < g(a) - f(a) < 1$  (d'après le tableau donné) d'où  $0 < (g(a) - f(a))^2 < 1$ , il en résulte que  $MN^2 < 1$  donc  $MN < 1$ .

4) a)



$$b) \text{ pour tout réel } x \in ]0, +\infty[, g(x) - f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x - \ln x + \frac{x-1}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x - \ln x + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ = \ln x - \frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

$$c) A = \int_1^e (g(x) - f(x)) dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) dx = \left[ x - \ln x - \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \left(e - \frac{5}{2}\right) \text{ua.}$$