

MATHÉMATIQUES

Section : Sciences Expérimentales
Session principale : juin 2015

Exercice 1 (Thèmes : produit vectoriel ; droite dans l'espace ; sphère)

1/ a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. donc les points A, B et C ne sont pas alignés par suite ils

déterminent un plan.

b) $1+1+0-2=0$ donc $A \in (P)$.

$1-1+2-2=0$ donc $B \in (P)$.

$0+1+1-2=0$ donc $C \in (P)$.

Il en résulte que $x+y+z-2=0$ est une équation de (P) .

c) $1+1+4-2=2 \neq 0$ donc $D \notin (P)$.

2/ a) $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 1-1=0$ donc $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA}$ par suite le triangle ABC est rectangle en C.

b) le triangle ABC est rectangle en C et $H = A * B$ donc c'est le centre du cercle \mathcal{C} .

3/ Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un normal à (P) donc il est directeur de Δ de plus le point $H = A * B$ donc $H(1,0,1)$, on

en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$.

4/ a) Le point H est le centre du cercle \mathcal{C} , circonscrit au triangle ABC et Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite Δ est l'axe du cercle \mathcal{C} et puisque M est un point de Δ donc $MA = MB = MC$.
Ou bien : $M \in \Delta$ donc $M(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$.

$$\begin{cases} MA^2 = \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 \\ MB^2 = \alpha^2 + (\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 \text{ donc } MA = MB = MC. \\ MC^2 = (\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 \end{cases}$$

b) $I \in \Delta$ donc $I(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$ $IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha + 1)^2 = (\alpha - 3)^2 \Leftrightarrow \alpha = 1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2, 2, 2)$ de Δ tel que $IA = ID$.

c) Le point $I \in \Delta$, d'après a) et b), $IA = IB = IC = ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA = \sqrt{5}$.

Exercice 2 (Thème : Nombres complexes)

1/ a) $|a| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ donc $A \in (C)$.

b) Il suffit de tracer la droite d'équation $x = 1$ et de remarquer que $(\text{Im}(a) > 0)$.

2/ a) $\Delta = (2i\sqrt{3})^2 + 24i\sqrt{2} = -12 + 24i\sqrt{2} = 12(-1 + 2i\sqrt{2}) = 12a^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}(1+i\sqrt{2})$.

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}(1+i\sqrt{2})}{2} = \sqrt{3}[i - 1 - i\sqrt{2}] = \sqrt{3}[-1 + i(1 - \sqrt{2})].$$

$$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}(1+i\sqrt{2})}{2} = \sqrt{3}[i + 1 + i\sqrt{2}] = \sqrt{3}[1 + i(1 + \sqrt{2})].$$

3/ a) $\frac{z_1 + z_2}{2} = i\sqrt{3} = z_K$ donc $K = M_1 * M_2$.

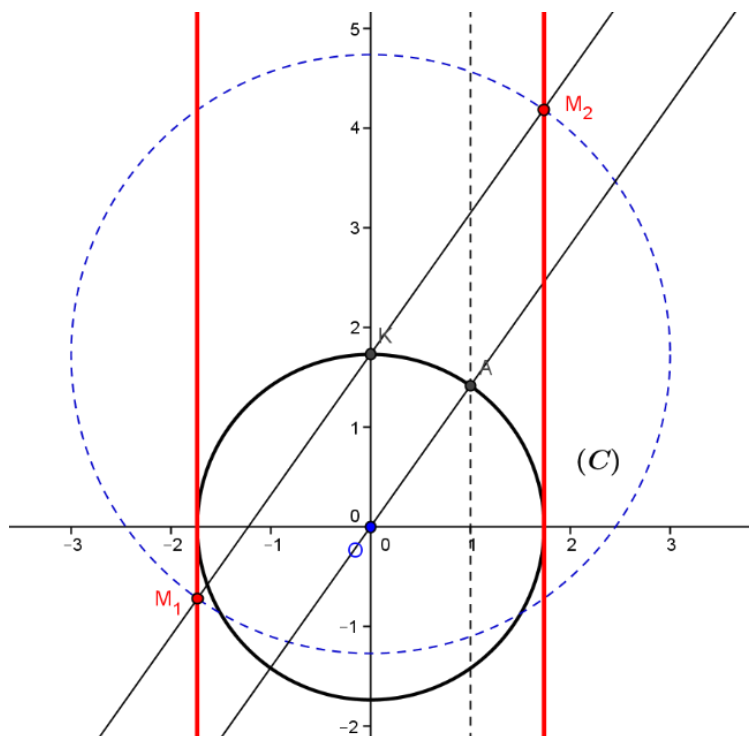
b) $\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{2(\sqrt{3} + i\sqrt{6})}{(1+i\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{3} + i\sqrt{6})(1-i\sqrt{2})}{3} = \frac{2\sqrt{3}(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$\frac{\text{Aff}(\overline{M_1M_2})}{\text{Aff}(\overline{OA})}$ est réel donc les vecteurs $\overline{M_1M_2}$ et \overline{OA} sont colinéaires donc $(M_1M_2) \parallel (OA)$.

c) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |2\sqrt{3} + 2i\sqrt{6}| = \sqrt{36} = 6$.

d) Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et le cercle de centre K et de rayon 3.

Ou bien : Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.



Exercice 3 (Thème : statistique à deux variables)

1/ a) $r = \frac{\text{cov}(t, C)}{\sigma_t \sigma_C} = 0.99998.$

b) $r = 0.99998$, il y a une très forte corrélation $\left(|r| > \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

c) $C = bt + a$ avec $b = \frac{\text{cov}(t, C)}{\sigma_t^2} = 23.19$ et $a = \bar{C} - b\bar{t} = 1.68$. Ainsi $C = 23.19t + 1.68$.

d) Pour $t = 188$, on obtient $C = 4361.4 \text{ cm}^3$.

2/ a) $C = \alpha t + 40\beta + 745$.

b) On sait que $C = 23.19t + 1.68 = \alpha t + 40\beta + 745$ par identification $\alpha = 23.19$ et $\beta = \frac{1.68 - 754}{40} = -18.808$.

3/ $C = 23.19t - 18.808g + 745$. Pour $g = 50$ et $t = 188$, on obtient $C = 4173.32 \text{ cm}^3$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; bijection ; notion d'aire)

1/ a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x = 0$ est une asymptote à \mathcal{C} .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite $y = x$ est une asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$ le signe est celui de $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		+	○ -
Positions		\mathcal{C} est au dessus de Δ	\mathcal{C} est en dessous de Δ

2/ a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{(x^2 - 1) + \ln x}{x^2}$.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		-	○ +
$\ln x$		-	○ +

c) Pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) < 0$.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

d) On a $f'(1) = 0$ de plus pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Il en résulte que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$.

e)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

3/ a) $D \square \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = e$. On en déduit qu'il existe une unique tangente D à \mathcal{C} au point

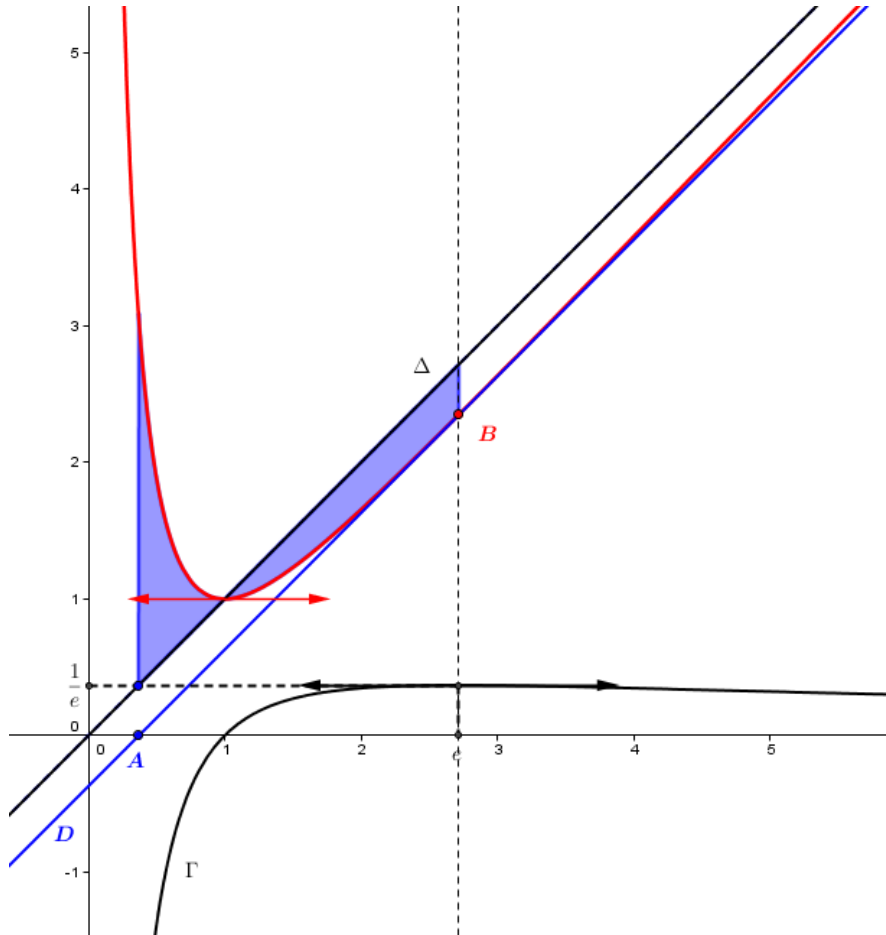
$$B\left(e, e - \frac{1}{e}\right).$$

b) $D: y = f'(e)(x - e) + f(e) = x - \frac{1}{e}$.

4/ a) $D: y = x - \frac{1}{e}$. Pour $x = \frac{1}{e}, y = 0$ donc $A \in D$.

b) $D \square \Delta$ et passe par A.

c)



$$5/ A = \int_{\frac{1}{e}}^e |f(x) - x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1 - \ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \left[-\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = 1 \text{ua.}$$