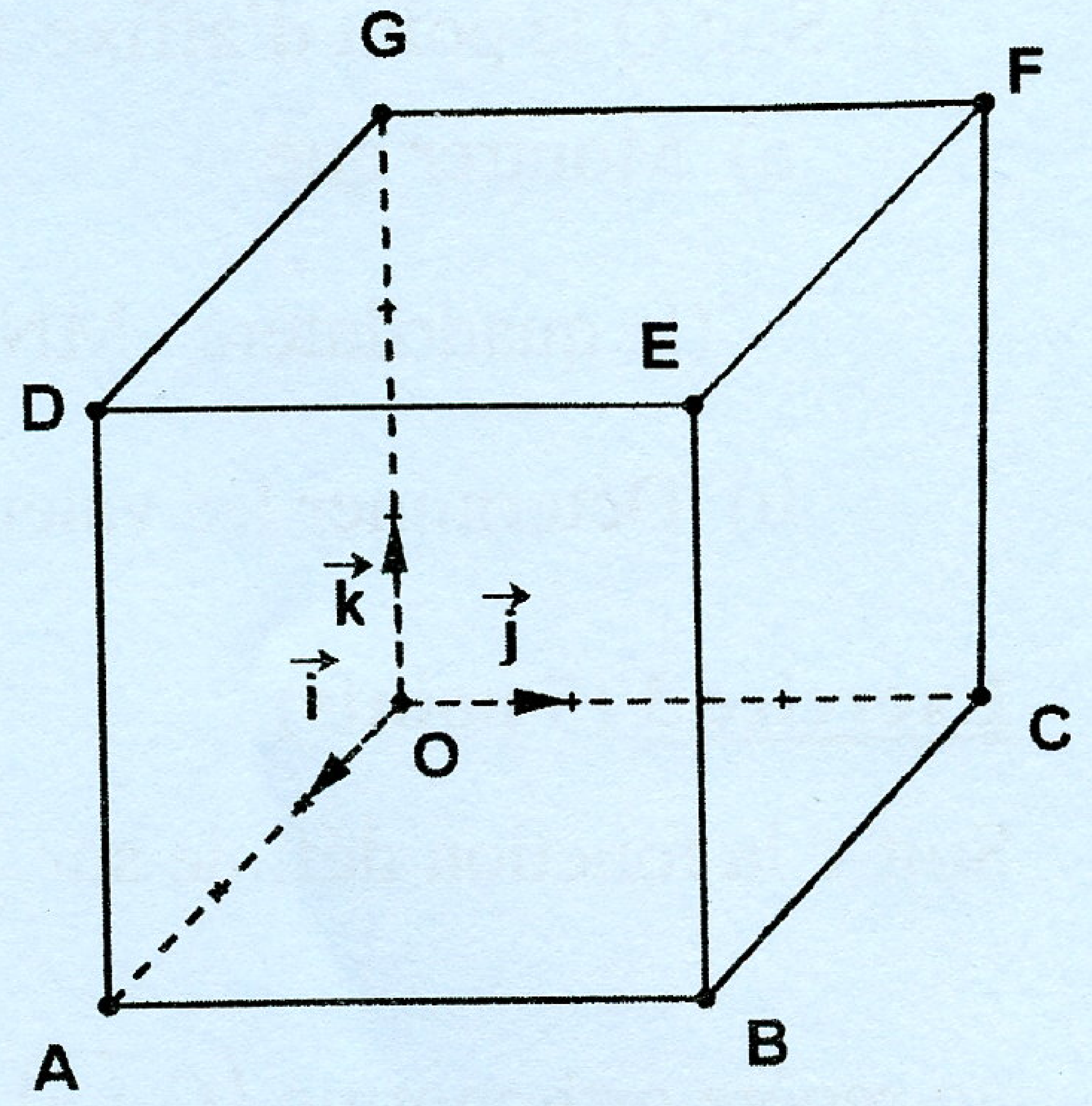
RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Sciences expérimentales** Durée : 3h — Coefficient : 3 **Session de contrôle**

Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (5 points)



On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que A(3,0,0) ; C(0,3,0) et G(0,0,3).

1) a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω milieu de $[CD]$.

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$.

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG .

3) On désigne par P le plan passant par les points A , E et G.

a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x-y+z-3=0$.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.

<u>Exercice 2</u> (5points)

A/1) a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{2}\,i$ et $z_D=2\sqrt{2}\,i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$$z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_C=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) Vérifier que $z_B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC)\perp(AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer ${z_N}^3$ et ${z_P}^3$.

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à ($\alpha^3 = -2\alpha$).

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.

<u>Exercice 3</u> (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln(1+\dfrac{1}{x})$.

c) Déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x\left(\ln(x+1) - \ln x\right) + \ln(x+1)}{x\left(x+1\right)\ln^2\left(x+1\right)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe (C) tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = f^{-1}(\dfrac{1}{n})$.

a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

b) Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n = x + 1$.

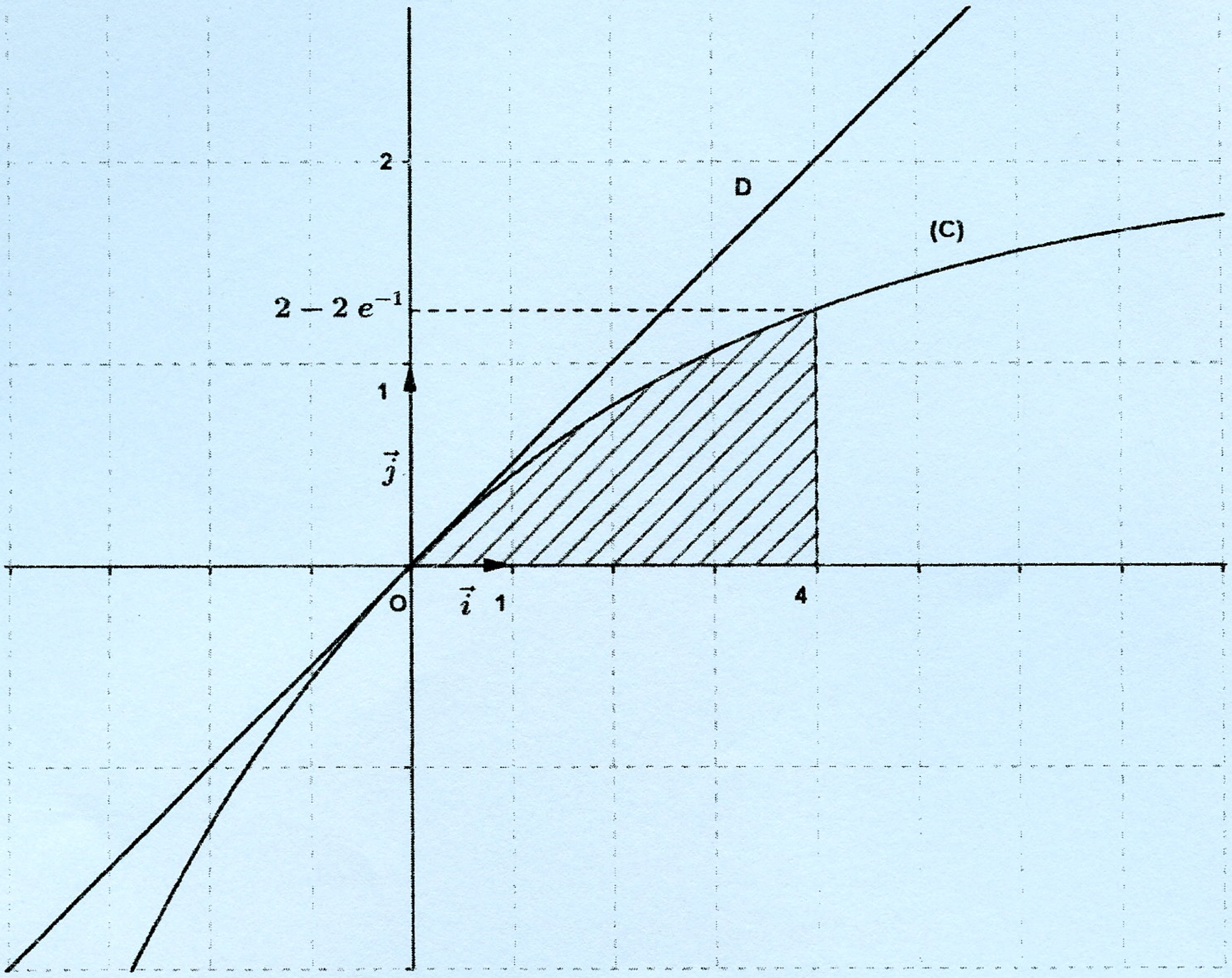
c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n)^n$.

Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci–dessous :

- la courbe (C) est la représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- la droite D est la tangente à (C) au point O.
- $f(4) = 2 - 2e^{-1}$.

On désigne par S l'aire en (u.a) de la partie hachurée et on admet que $S = 8e^{-1}$.



1) a) Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b) En déduire que $b = \frac{1}{2}$.

2) a) Justifier que pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{a}\left(f'(x) - \frac{1}{2}\right)$

b) En déduire que $S = \frac{-2e^{-1}}{a}$.

c) Montrer alors que $a = -0,25$.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2 - 2e^{-0.25x}$.

4) On admet que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ modélise l'évolution de la hauteur d'une certaine espèce de maïs. Autrement dit : si on note h(t) la hauteur en mètres de cette espèce de maïs à l'instant t (exprimé en semaines) alors $h(t) = 2 - 2e^{-0.25t}$.

a) Déterminer la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines.

b) Au cours de quelle semaine la hauteur d'une plante de maïs dépassera-t-elle 198 cm ?

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .
Nom et Prénom : . . . .
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants
. . . .
. . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Sciences expérimentales**

Annexe à rendre avec la copie