Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences expérimentales)

Session principale 2018

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan , plan tangent à une sphère**
- **Volume d'un tétraèdre**

1. $A(x;y;z)\in Q\cap(O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2;0;0)$

$B(x;y;z)\in Q\cap(O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(0;2;0)$

$C(x;y;z)\in Q\cap(O,\vec{k}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{2} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(0;0;\sqrt{2})$

2. Puisque $S: x^2+y^2+z^2=1$ donc S est la sphère de centre O et de rayon 1

On a $d(O,Q)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1+2}}=1$ donc Q est tangent à la sphère S

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q

$M(x;y;z)\in Q\cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+\alpha \\ y=0+\alpha \\ z=0+\sqrt{2}\alpha \\ x+y+\sqrt{2}z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\sqrt{2}\alpha \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Conclusion : $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. On a $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}a\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}0\\\dfrac{4}{a}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}=\begin{vmatrix}0 & \frac{4}{a}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{4}{a}\end{vmatrix}\vec{k}=\frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{i}+\sqrt{2}a\vec{j}+4\vec{k}$

ainsi $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{a}\\ \sqrt{2}a\\ 4\end{pmatrix}$

4. **a.** Puisque $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{a}\\ \sqrt{2}a\\ 4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CMN) donc une

équation du plan (CMN) est $\frac{4\sqrt{2}}{a}x+\sqrt{2}ay+4z+d=0$ et puisque

$C\left(0;0;\sqrt{2}\right)\in(CMN)$ donc $d=-4\sqrt{2}$ ainsi $(CMN):\frac{4\sqrt{2}}{a}x+\sqrt{2}ay+4z-4\sqrt{2}=0$

équivaut à $(CMN):4x+a^2y+2a\sqrt{2}z-4a=0$

b. on a $(CMN):4x+a^2y+2a\sqrt{2}z-4a=0$

donc $d=d\left(O,(CMN)\right)=\frac{|-4a|}{\sqrt{16+a^4+8a^2}}=\frac{4a}{\sqrt{\left(4+a^2\right)}}=\frac{4a}{4+a^2}$

et puisque $1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=\frac{a^2+4-a^2+4a-4}{a^2+4}=\frac{4a}{4+a^2}$ donc $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$

c. On a $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$ est maximale lorsque $\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=0$ donc $a=2$

5. **a.** on a $V(OCMN)=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\right).\overrightarrow{CO}\right|=\frac{1}{6}\left|4\sqrt{2}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

autrement : $V(OCMN)=\frac{A(OMN)\times OC}{3}=\frac{a\times\frac{4}{a}\times\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b. On a $V(OCMN)=\frac{A(CMN)\times d}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d'où $A(CMN)=\frac{2\sqrt{2}}{d}$

puisque $d\leq 1$ donc $\frac{1}{d}\geq 1$ d'où $A(CMN)=\frac{2\sqrt{2}}{d}\geq 2\sqrt{2}$

c. on a $A(CMN)=2\sqrt{2}\iff\frac{2\sqrt{2}}{d}=2\sqrt{2}\iff d=1\iff a=2$ donc $M=A$ et $N=B$

<u>Exercice n°2 :</u>

De quoi s'agit-il ?

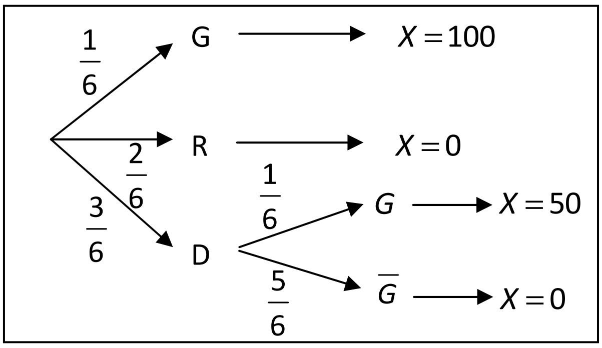
- **Calcul de probabilité d'évènements**
- **Probabilité conditionnelle, probabilité total**
- **Variable aléatoire et espérance**
- **Loi Binomiale**

1.

a. On a $p(G_1)=\frac{1}{6}$

b. On a $p(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

c. On a $p(G_1\cup G_2)=p(G_1)+p(G_2)-p(G_1\cap G_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-0=\frac{1}{4}$



2.

a. On a $X(E)=\{0;50;100\}$

$p(X=0)=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}$

Autrement : $p(X=0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$p(X=50)=p(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$p(X=100)=p(G_1)=\frac{1}{6}$

b. Le montant moyen à recevoir par un client est

$E(X)=0+50\times\frac{1}{12}+100\times\frac{1}{6}=\frac{125}{6}=20{,}833DT$

3. Y suit une loi binomiale de paramètre $n=200$ et $p=0{,}25$ alors $E(Y)=200\times0{,}25=50$

4. Le montant moyen qu'il doit prévoir de dépenser est $200\times E(X)=200\times\frac{250}{12}=4166{,}7$

Exercice n°3:

De quoi s'agit-il ?

- **Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**
- **Complexe et géométrie**

1. On a $(E): z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$

   Puisque $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 1$ donc

   $z' = \dfrac{i\sqrt{3}-1}{2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z'' = \dfrac{i\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2.

   a. On a $P\left(i\sqrt{3}\right) = 3\left(i\sqrt{3}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(i\sqrt{3}\right)^3 - 18\left(i\sqrt{3}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(i\sqrt{3}\right) + 3$

   $$= 27 - 7i\sqrt{3}\left(-i3\sqrt{3}\right) + 18\times 3 - 21 + 3 = 27 - 63 + 54 - 21 + 3 = 0$$

   On a $P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 - 18\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + 3$

   $$= 3e^{i\frac{4\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18e^{i\frac{2\pi}{3}} + 7i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 3$$

   $$= -3e^{i\frac{\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{7i\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2} + 3$$

   $$= -3\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 7i\sqrt{3} + 9 - 9i\sqrt{3} + \frac{7i\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2} + 3$$

   $$= -12 + 12 + i\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2} - 2 + \frac{7}{2}\right) = 0$$

   b. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

   $$P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{3}{z^4} + \frac{7i\sqrt{3}}{z^3} - \frac{18}{z^2} - \frac{7i\sqrt{3}}{z} + 3 = \frac{3 + 7i\sqrt{3}z - 18z^2 - 7i\sqrt{3}z^3 + 3z^4}{z^4} = \frac{P(z)}{z^4}$$

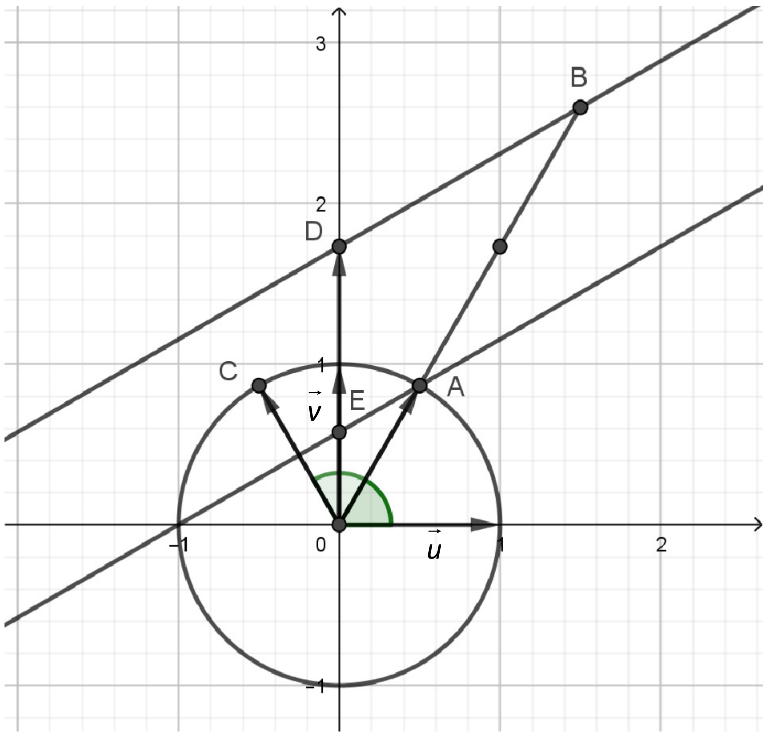
   c. On a $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\dfrac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}i}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}i\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\sqrt{3}i\right) = 0$

   $$P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

   d'où $\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$

3.

a.



b. On a $z_D = z_A + z_c = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

c. On a $aff\left(\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $aff\left(\overrightarrow{EA}\right) = z_A - z_E = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - iy = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)$

$(AE)//(BD)$ donc $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - y \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

équivaut à $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $z_E = \frac{\sqrt{3}}{3}i$

Autrement : dans le triangle OBD on a $(EA)//(BD)$ d'après Thales puisque

$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ ainsi $z_E = \frac{1}{3}z_D = \frac{i\sqrt{3}}{3}$

Exercice n°4:

De quoi s'agit-il ?

- **Utiliser un graphique pour déterminer les images et les limites d'une fonction ainsi que le signe de sa fonction dérivée**
- **Fonction en exponentielle et ln (limites, variations, branches infinies)**
- **Calcul d'aires et encadrement**
- **Fonctions primitives**

A. **1.** On a $u(1)=0$, $u(\alpha)=0$, $u'(4)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{u(x)}{x}=1$

2.

x	0		1		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		4		$+\infty$
$u'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

B.

1. **a.** Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$,

$$e^{u(x)}-u(x)=e^{x-1-4\ln x}-(x-1-4\ln x)=\frac{e^{x-1}}{e^{4\ln x}}-(x-1)+4\ln x=\frac{e^{x-1}}{x^4}-(x-1)+4\ln x=f(x)$$

b. On a $f(\alpha)=e^{u(\alpha)}-u(\alpha)=e^0-0=1$

c. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{u(x)}-u(x)\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{u(x)}-u(x)\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\end{cases}$

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^5}\right)e^{-1}-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+4\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$

autrement : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{u(x)}}{x}-\dfrac{u(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{u(x)}}{u(x)}\times\dfrac{u(x)}{x}-\dfrac{u(x)}{x}\right)+\infty$

e. La droite $\Delta: x=0$ est une asymptote à (C)

(C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

2.

a. Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f(x)=e^{u(x)}-u(x)$

$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}-u'(x)=u'(x)\left[e^{u(x)}-1\right]$

b. Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f(x)=u'(x)\left(e^{u(x)}-1\right)$

On a $e^{u(x)}-1\geq 0 \iff e^{u(x)}\geq 1 \iff u(x)\geq 0$ d'où

x	0		1		4		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$e^{u(x)}-1$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $f'(x)>0$ si et seulement si $x\in\,]1;4[\,\cup\,]\alpha;+\infty[$

c. Le tableau de variation de f :

x	0		1		4		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$f(4)$	↘	1	↗	$+\infty$

3.

a. Soit $h(x)=e^{x}-2x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x)=e^{x}-2$

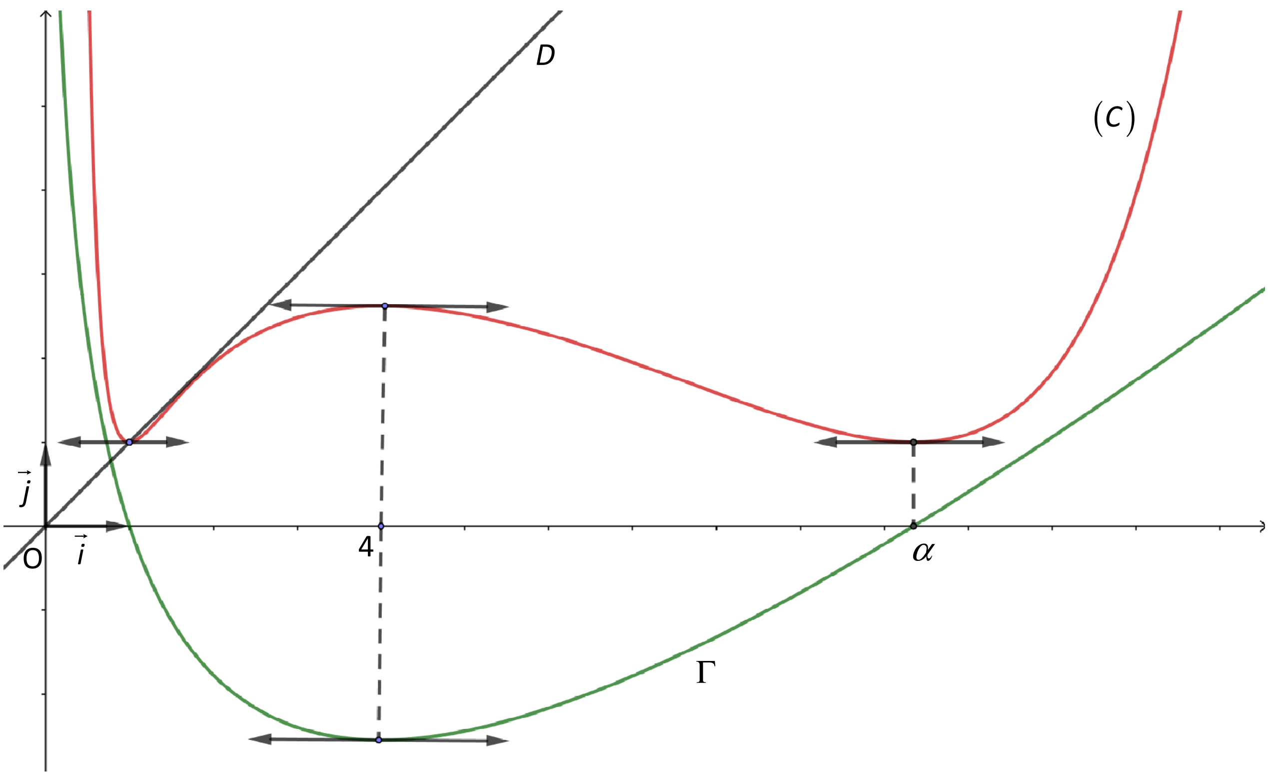
On a $h'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$ d'où

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(\ln 2)$	↗	$+\infty$

On a $h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$ donc $h(x)>0$ pour tout réel x

b. Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ on a $f(x)-u(x)=e^{u(x)}-2u(x)>0$ d'où (C) est au dessus de (Γ)

c.



4. **a.** On a

$$A' = \int_3^5 |u(x)| dx = \int_3^5 -u(x) dx = \int_3^5 (-x+1+4\ln x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x + 4x\ln x - 4x \right]_3^5$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\ln x - 3x \right]_3^5 = \left(-\frac{25}{2} + 20\ln 5 - 15 \right) - \left(-\frac{9}{2} + 12\ln 3 - 9 \right) = 20\ln 5 - 12\ln - 14$$

b. On a pour tout $x \in [3;5]$, $-u(x) < f(x) < f(4)$

d'où $\int_3^5 -u(x) dx < \int_3^5 f(x) dx < \int_3^5 f(4) dx$ donc $A' < A < 2f(4)$

or on a $A' \simeq 5{,}00541 > 5$ et $2f(4) \simeq 5{,}24 < 5{,}25$ d'où $5 < A < 5{,}25$