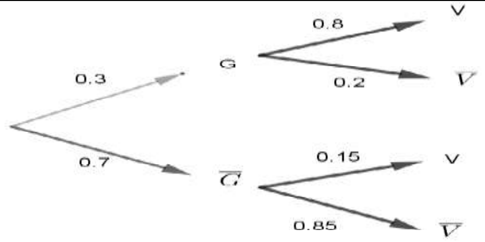
Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

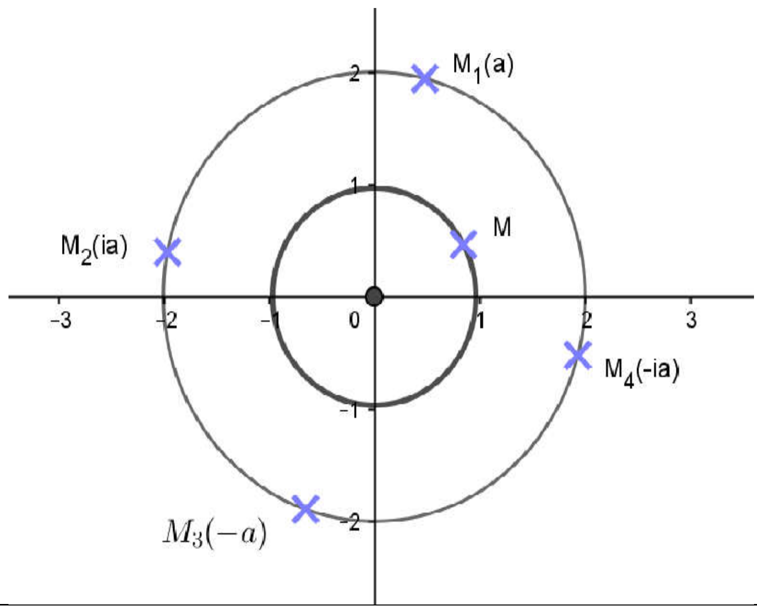
Session principale

<u>Exercice 1</u> (4 points)

Questions	**Solution**
1)	
2)	$p(V)=p(V/G)p(G)+p(V/\overline{G})p(\overline{G})$ $=0.3\times0.8+0.7\times0.15=0.345$
3)	$p(\overline{G}/V)=\dfrac{p(\overline{G}\cap V)}{p(V)}=\dfrac{0.15\times0.7}{0.345}=0.304$
4)	$p=C_{10}^{2}\times(0.8)^2\times(0.2)^8=0.0000737$
5) a/	La probabilité demandée est $(0.2)^n$
b/	$p_n=1-(0.2)^n$
c/	$p_n\geq 0.9\Leftrightarrow 1-(0.2)^n\geq 0.9\Leftrightarrow(0.2)^n\leq 0.1$ $\Leftrightarrow n\ln(0.2)\leq\ln(0.1)$ $\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\ln(0.1)}{\ln(0.2)}\Leftrightarrow n\geq 1.43$ alors le plus petit valeur est $n=2$

<u>Exercice 2</u>(4 points)

Questions	**solutions**
1) a/	$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ on a $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$
b/	on a : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\right)$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ et d'autre part on a $a=2e^{i\frac{5\pi}{12}}=2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+2i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et par conséquent

	on aura $\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases}$ Or on sait que $\frac{11\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}$ donc $\begin{cases}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\end{cases}$
2) a/	on a $a=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ donc $a^4=\left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4=16e^{i\frac{5\pi}{3}}=16\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$.
b/	b/ $z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow z^4=a^4\Leftrightarrow z^4-a^4=0\Leftrightarrow\left(z^2-a^2\right)\left(z^2+a^2\right)=0\Leftrightarrow$ $(z-a)(z+a)(z+ia)(z-ia)=0\Leftrightarrow z=a$, $z=-a$, $z=ia$ et $z=-ia$
c/	

<u>Exercice 3</u> (5 points)

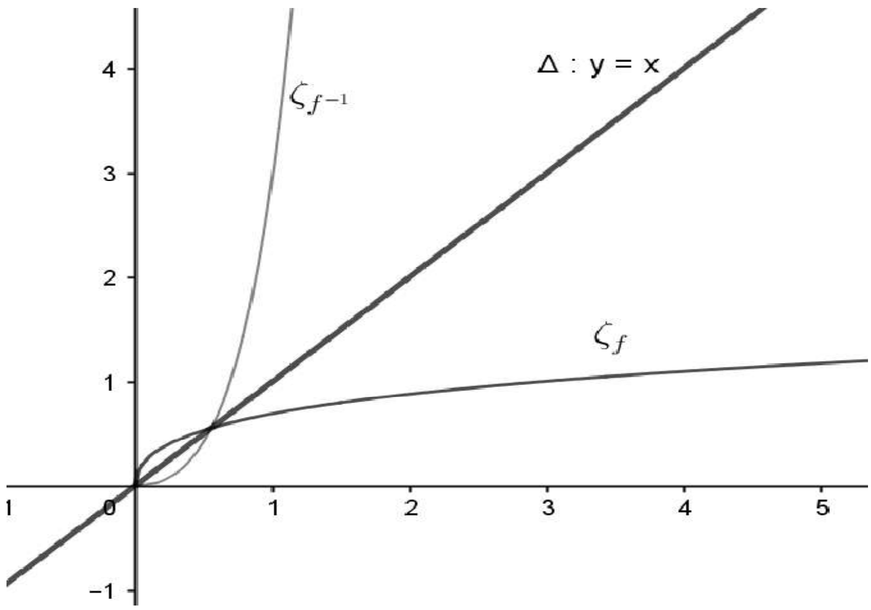
Questions	**Solution**
1) a/	on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et alors les points A , B et C définissent un plan P.
b/	$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P donc P a pour équation : $-6x-6y+6z+d=0$ et comme $A(-2,1,1)\in P$ donc $12-6+6+d=0$ donc $d=-12$ et alors $P:-6x-6y+6z-12=0$ alors P: $x+y-z+2=0$

2) a/	on a $2+2-0+2=6\neq 0$ donc $E\notin P$
b/	$V_{EABC}=\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|=6$
3)	$\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ qui est un vecteur normal de P donc $\Delta\perp P$ $M\left(x\quad y\quad z\right)\in P\cap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\alpha+\alpha-(-\alpha+2)+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\x=0\\y=0\\z=2\end{cases}$ Donc $P\cap\Delta=\left\{H\left(0,0,2\right)\right\}$
4) a/	$\alpha\neq 0$ et $M\left(\alpha,\alpha,-\alpha+2\right)\in\Delta$ $V_{MABC}=\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha+2\\\alpha-1\\-\alpha+1\end{pmatrix}\right\|=\left\|3\alpha\right\|$
b/	$V_{MABC}=2\,V_{EABC}\Leftrightarrow\left\|3\alpha\right\|=12\Leftrightarrow\alpha=4$ ou $\alpha=-4$ donc $M\left(4,4,-2\right)$ ou $\mathrm{M}\left(-4,-4,6\right)$

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$f\,(x)=\ln(1+\sqrt{x}\,)$ On a la fonction $x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positif sur $\left[0,+\infty\right[$ alors la fonction f est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et on a pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, $f\,'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$
b/	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\,(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=\left(+\infty\right)\times 1=+\infty$ En effet $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

	$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigé vers les ordonnées positif
c/	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\sqrt{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x} . \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}} = 0 \times 0 = 0$ En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\sqrt{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)} = 0$ Donc la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.
d/	$\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$
e/	f est continu et strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left[0,+\infty\right[$ sur $f\left(\left[0,+\infty\right[\right) = \left[0,+\infty\right[$.
f/	soit $x \in \left[0,+\infty\right[$ et $y \in \left[0,+\infty\right[$ tel que $f^{-1}(x) = y$ $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{y}) = x \Leftrightarrow 1+\sqrt{y} = e^x$ $\Leftrightarrow \sqrt{y} = e^x - 1 \Leftrightarrow y = \left(e^x - 1\right)^2$ donc pour tout $x \in \left[0,+\infty\right[$ on a $f^{-1}(x) = \left(e^x - 1\right)^2$
2) a/	$I = \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$ On a $\dfrac{1}{4} \le x \le 1$ donc $\dfrac{1}{2} \le \sqrt{x} \le 1$ donc $\dfrac{3}{4} \le x + \sqrt{x} \le 2$ donc $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} \le \dfrac{4}{3}$ d'ou $\dfrac{1}{4} \le f'(x) \le \dfrac{2}{3}$ soit donc pour tout $x \in I$, $f'(x) \le \dfrac{2}{3}$
b/	On pose $u(x) = f(x) - x$ u est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$ $u'(x) = f'(x) - 1 \prec 0$ alors la fonction u est strictement décroissante sur I . u est continu et strictement décroissante sur I alors elle réalise une bijection de I sur $u(I) = \left[\ln 2 - 1, \ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4}\right] = J$ et comme $0 \in J$ alors l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans I . De plus $u(0.5) \times u(0.6) \prec 0$ donc $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$

3) a/	
b/	$A = 2\int_0^{\alpha}\left(x - f^{-1}(x)\right)dx = 2\int_0^{x} x - \left(e^x - 1\right)^2 dx = 2\int_0^{\alpha}(x - e^{2x} + 2e^x - 1)dx$ $= 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - x\right]_0^{\alpha}$ $= \alpha^2 - e^{2\alpha} + 4e^{\alpha} - 2\alpha - 3$
4) a/	on a $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ donc vrais pour n= 0 Soit $n \in IN$, supposons que $u_n \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ et montrons que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ On a $\frac{1}{4} \le u_n \le 1$ et f est une fonction strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4},1\right]$ alors $f(\frac{1}{4}) \le f(u_n) \le f(1)$ donc $\frac{1}{4} \le \ln(\frac{3}{2}) \le u_{n+1} \le \ln 2 \le 1$ alors $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ par suite pour tout $n \in IN$ $u_n \in \left[\frac{1}{4},1\right]$.
b/	f est dérivable sur $\left[\frac{1}{4},1\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{4},1\right]$, $f'(x) \le \frac{2}{3}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a et le faite que $u_n, \alpha \in I$ donc $\lvert f(u_n) - f(\alpha)\rvert \le \frac{2}{3}\lvert u_n - \alpha\rvert \Leftrightarrow \lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \le \frac{2}{3}\lvert u_n - \alpha\rvert$ et on montre par récurrence sur n que pour tout $n \in IN$ $\lvert u_n - \alpha\rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ On a $\lvert u_0 - \alpha\rvert = \lvert 1 - \alpha\rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour n=0

	Soit $n \in IN$ supposons que $\|u_n - \alpha\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $\|u_{n+1} - \alpha\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ On sait que $\|u_{n+1} - \alpha\| \leq \frac{2}{3}\|u_n - \alpha\|$ donc $\|u_{n+1} - \alpha\| \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ alors $\|u_{n+1} - \alpha\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ et par suite pour tout $n \in IN$ on a $\|u_n - \alpha\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
c/	c/ on a $\|u_n - \alpha\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ donc la suite est convergente et converge vers α
d/	on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ et f^{-1} est continu en α donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f^{-1}(\alpha) = \alpha$