MATHS

Section : Sport

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + U_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2 . En déduire que la suite (U_n) n'est pas géométrique.
2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.
   b) Montrer alors que la suite (U_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.
3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 1$
   a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
   b) Exprimer U_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Contenu

- *Suites réelles.*
- *Variation d'un suite réelle, limite d'une suite réelle .*
- *Terme général d'une suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Déterminer le terme général d'une suite réelle.*
- *Etudier les variations d'une suite réelle, calculer la limite d'une suite.*

Solutions

1. $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$ $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite u n'est pas géométrique.

2. a) $u_0 > 1$ (car $u_0 = 2$)

Supposons $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

Or $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n)$; $1+u_n > 2$ donc $u_{n+1} > 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - 1) > 0$ donc la suite u est décroissante.

c) la suite u est décroissante et minorée par 1 donc la suite est convergente.

3. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(1 + u_n) - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$

$v_n = \frac{1}{2^n} v_0 = \frac{1}{2^n}$

4. $u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Exercice 2

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant, chacune, une des lettres A, B, C, O, P, R, S, T (chaque lettre figure sur une seule boule).
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard cinq boules de l'urne.

1) On désigne par E et F les évènements suivants :
   E : «Les lettres du mot "BAC" figurent sur trois boules parmi les cinq boules tirées».
   F : «Les lettres du mot "SPORT" figurent sur les cinq boules tirées».
   a) Justifier que $p(E) = \frac{5}{28}$.
   b) Calculer $p(F)$ et en déduire $p(E \cup F)$.

2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le nombre de lettres du mot "SPORT" figurant sur les boules tirées.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	2			
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$			

   b) Déduire la probabilité de l'évènement G:
   « Au moins une lettre du mot BAC apparait dans le tirage des cinq boules »

Contenu

- *Probabilité d'un évènement*
- *Loi de probabilité d'une variable aléatoire*

Aptitudes visées :

- *Calculer la probabilité d'un évènement*
- *Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle*

Solutions

1. a) $p(E) = \frac{C_3^3 C_5^2}{C_8^5} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

b) $p(F) = \frac{C_5^5}{C_8^5} = \frac{1}{56}$ et $p(E \cup F) = \frac{5}{28} + \frac{1}{56} = \frac{11}{56}$ car $E \cap F = \varnothing$

2. a)

x_i	2	3	4	5
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{C_5^3 C_3^2}{C_8^5} = \frac{30}{56}$	$\frac{C_5^4 C_3^1}{C_8^5} = \frac{15}{56}$	$\frac{C_5^5}{C_8^5} = \frac{1}{56}$

3. $p(G) = 1 - p(X = 5) = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$

Exercice 3

On a donné ci-dessous la courbe (C), dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1) a) Donner $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) Justifier que pour tout $x \in]-1, 3[$; $f(x) > 0$.

2) Placer sur l'axe des abscisses les réels α et β vérifiant :

$f(\alpha) = f(\beta) = 1 \qquad (\alpha < \beta)$.

3) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, 3[$ par

$$g(x) = \text{Log}(-x^2 + 2x + 3).$$

On désigne par (C') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

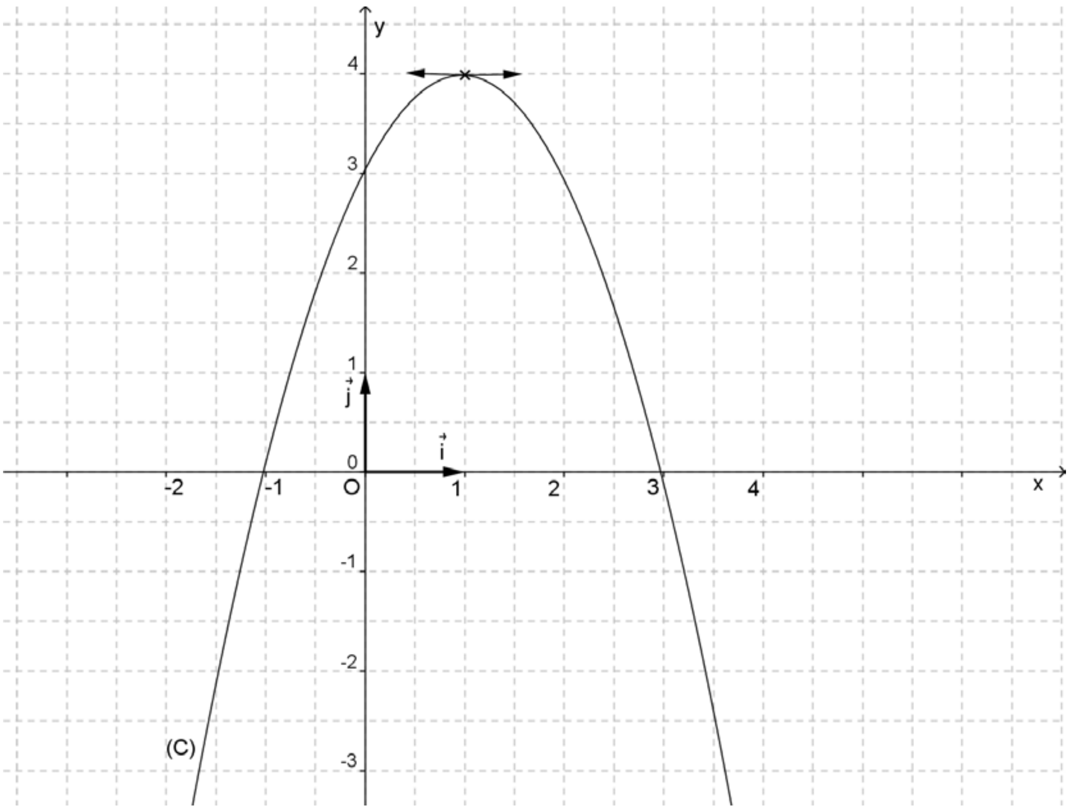
c) Justifier que g est dérivable sur I et vérifier que pour tout $x \in I$;

$$g'(x) = \frac{2(1-x)}{f(x)}$$

d) Dresser alors le tableau de variations de g.

4) a) Vérifier que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.

b) Tracer la courbe (C') sur la feuille à rendre. (On tracera les asymptotes à (C')).



Contenu

- *Fonction ln : calcul de limites, branches infinies.*
- *Variation d'une fonction, courbe représentative.*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître une branche infini d'une fonction.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Tracer la courbe représentative d'une fonction.*

Solutions

1) a) $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$

c) Le trinôme $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ s'annule en -1 et 3 donc Justifier que pour tout $x \in]-1, 3[$; $f(x) > 0$.

2) La droite d'équation x = 1 coupe la courbe en deux points A et B . Les droites passant par A et B et parallèles à l'axe des ordonnées coupe respectivement l'axe des abscisses en α et β .

3) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, 3[$ par

$$g(x) = \text{Log}(-x^2 + 2x + 3).$$

On désigne par (C') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$. La droite d'équation x = -1 est une asymptote à la courbe de f.

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$. La droite d'équation x = 3 est une asymptote à la courbe de f.

g) Pour $x \in I$; $g'(x) = \dfrac{2(1-x)}{f(x)}$

h) Variations de g : g est strictement décroissante sur $]-1, 1[$ et strictement croissante sur

x	-1		1		3
g'(x)		+		-	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

4) a) $g(\alpha) = \ln 1 = 0$ et $g(\beta) = \ln 1 = 0$.

b)