Mathématiques
Section Sport
Corrigé de la session principale Juin 2013

Exercice 1

(U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 8 \\ 4U_{n+1} - 3U_n = 4 \text{ ; pour tout } n \in IN \end{cases}$

1) On peut tout d'abord exprimer U_{n+1} en fonction de U_n :

$$4U_{n+1} - 3U_n = 4 \Leftrightarrow 4U_{n+1} = 4 + 3U_n$$
$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{1}{4}(4+3U_n)$$
$$\Leftrightarrow U_{n+1} = 1 + \frac{3}{4}U_n$$

On a donc $U_0 = 8$ et $U_{n+1} = 1 + \frac{3}{4}U_n$; pour tout $n \in IN$.

$$U_1 = 1 + \frac{3}{4}U_0 = 1 + \frac{3}{4}\times 8 = 7 \text{ ; } U_2 = 1 + \frac{3}{4}U_1 = 1 + \frac{3}{4}\times 7 = \frac{25}{4}.$$

$$U_1 - U_0 = 7 - 8 = -1 \text{ ; } U_2 - U_1 = \frac{25}{4} - 7 = -\frac{3}{4}.$$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ d'où la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{7}{8} = \frac{49}{56} \text{ ; } \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{25}{4}}{7} = \frac{25}{4}\times\frac{1}{7} = \frac{25}{28} = \frac{50}{56}.$$

$\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$, d'où la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2)a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 4$.

- $U_0 = 8$; $U_0 > 4$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit p un entier naturel.

  On suppose que l'inégalité est vraie pour p, c'est à dire $U_p > 4$.

- Montrons que l'inégalité est vraie pour $p+1$.

$$U_p > 4 \Rightarrow \frac{3}{4}U_p > \frac{3}{4}\times 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}U_p > 3$$

$$\Rightarrow 1+\frac{3}{4}U_p > 4$$

$$\Rightarrow U_{p+1} > 4$$

D'où l'inégalité est vraie pour $p+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, $U_n > 4$.

b) Montrons que la suite (U_n) est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = 1+\frac{3}{4}U_n - U_n = 1-\frac{1}{4}U_n = \frac{1}{4}(4-U_n)$$

On a : $U_n > 4 \Rightarrow 4-U_n < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(4-U_n) < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < U_n$$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

c) la suite (U_n) est décroissante et minorée (par 4), donc elle converge.

3) (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = U_n - 4$.

a) $4V_{n+1} - 3V_n = 4(U_{n+1}-4) - 3(U_n - 4)$

$$= 4U_{n+1} - 16 - 3U_n + 12$$

$$= 4U_{n+1} - 3U_n - 4$$

$$= 4(1+\frac{3}{4}U_n) - 3U_n - 4$$

$$= 4 + 3U_n - 3U_n - 4 = 0$$

D'où $4V_{n+1} - 3V_n = 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $4V_{n+1} - 3V_n = 0 \Leftrightarrow 4V_{n+1} = 3V_n$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n$$

$V_0 = U_0 - 4 = 8 - 4 = 4.$

D'où (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 4$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

$q = \frac{3}{4}$, d'où la suite (V_n) converge vers 0.

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n = U_n - 4 \Leftrightarrow U_n = V_n + 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n + 4 = 4.$

Exercice 2

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher 4 vertes, 4 bleues et 2 jaunes.

$$10 \text{ boules} \begin{cases} 4 \ V \\ 4 \ B \\ 2 \ J \end{cases}$$

1) L'épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

L'univers Ω des cas possibles est donc les combinaisons de 3 boules parmi les 10 boules.

$$\text{Card}\Omega = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2} = 120.$$

a) A : « Les trois boules tirées sont de même couleur ».

Donc toutes les trois boules sont tirées parmi les boules vertes ou toutes elles sont tirées parmi les boules bleues.

$$p(A) = \frac{C_4^3 + C_4^3}{120} = \frac{4+4}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

b) A : « Les trois boules tirées sont de même couleur ».

On peut définir l'évènement contraire de A de plusieurs façons :

$\overline{A}$: « Les trois boules tirées ne sont pas de même couleur ».

$\overline{A}$: « Obtenir au moins deux couleurs ».

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

2)a) B : « Obtenir exactement une boule jaune ».

Pour réaliser l'évènement B, on tire une boule jaune parmi les deux boules jaunes et on tire les deux autres boules parmi les boules des deux autres couleurs.

$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_8^2}{120} = \frac{2\times28}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}.$$

C : « Exactement deux couleurs restent dans l'urne ».

L'épreuve consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne, donc après tirage il y aura toujours des boules vertes et des boules bleues (puisqu'on a 4 boules vertes et 4 boules bleues). D'où la seule possibilité d'avoir exactement deux couleurs dans l'urne, après le tirage, c'est de tirer les deux boules jaunes parmi les trois boules tirées.

On peut traduire l'évènement C autrement : C : « Tirer deux boules jaunes ».

$$p(C) = \frac{C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{1\times8}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

b) E « Obtenir au moins une boule jaune ».

C'est-à-dire obtenir une boule jaune ou deux boules jaunes.

$p(E)=p(B\cup C)=p(B)+p(C)=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$. Les évènements B et C sont incompatibles donc $p(B\cup C)=p(B)+p(C)$.

3) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le nombre de couleurs obtenues.

a) (X=2) : « Obtenir deux couleurs ».

C'est-à-dire obtenir les couleurs (V et B) ou (V et J) ou (J et B).

(V et B) : obtenir (2V et 1B) ou (1V et 2B).

(V et J) : obtenir (2V et 1J) ou (1V et 2J).

(J et B) : obtenir (2J et 1B) ou (1J et 2B).

$$p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_4^1+C_4^1\times C_4^2}{120}+\frac{C_4^2\times C_2^1+C_4^1\times C_2^2}{120}+\frac{C_4^2\times C_2^1+C_4^1\times C_2^2}{120}$$

$$=\frac{48}{120}+\frac{16}{120}+\frac{16}{120}$$

$$=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$$

b) (X=1) : « Obtenir une seule couleur ». $p(X=1)=p(A)=\frac{1}{15}$.

(X=3) : « Obtenir trois couleurs ». $p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_4^1\times C_2^1}{120}=\frac{32}{120}=\frac{4}{15}$.

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$

Exercice 3

f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\text{Log}(\frac{2+x}{2x})$ et (C) sa représentation graphique selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\text{Log}\frac{2+x}{2x}=+\infty$.

D'où la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale pour la courbe (C).

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\text{Log}\frac{2+x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\text{Log}(\frac{2}{2x}+\frac{x}{2x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\text{Log}(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})=\text{Log}(\frac{1}{2})=-\text{Log}2.$$

D'où la droite d'équation $y=-\text{Log}2$ est une asymptote horizontale pour la courbe (C).

2)a) $f(x)=\text{Log}\frac{2+x}{2x}$; $x\in\,]0,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2+x}{2x}\right)'}{\left(\frac{2+x}{2x}\right)}=\left(\frac{2+x}{2x}\right)'\times\frac{2x}{2+x}=\frac{2x-2(2+x)}{(2x)^2}\times\frac{2x}{2+x}=\frac{-4}{2x}\times\frac{1}{2+x}=-\frac{2}{x(2+x)}$$

b) $f'(x)=-\dfrac{2}{x(2+x)}$; $x\in\left]0,+\infty\right[$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe du trinôme du second degré $x(2+x)$.

Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $x(2+x)>0$. D'où $f'(x)<0$; pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$.

Le tableau de variation de f :

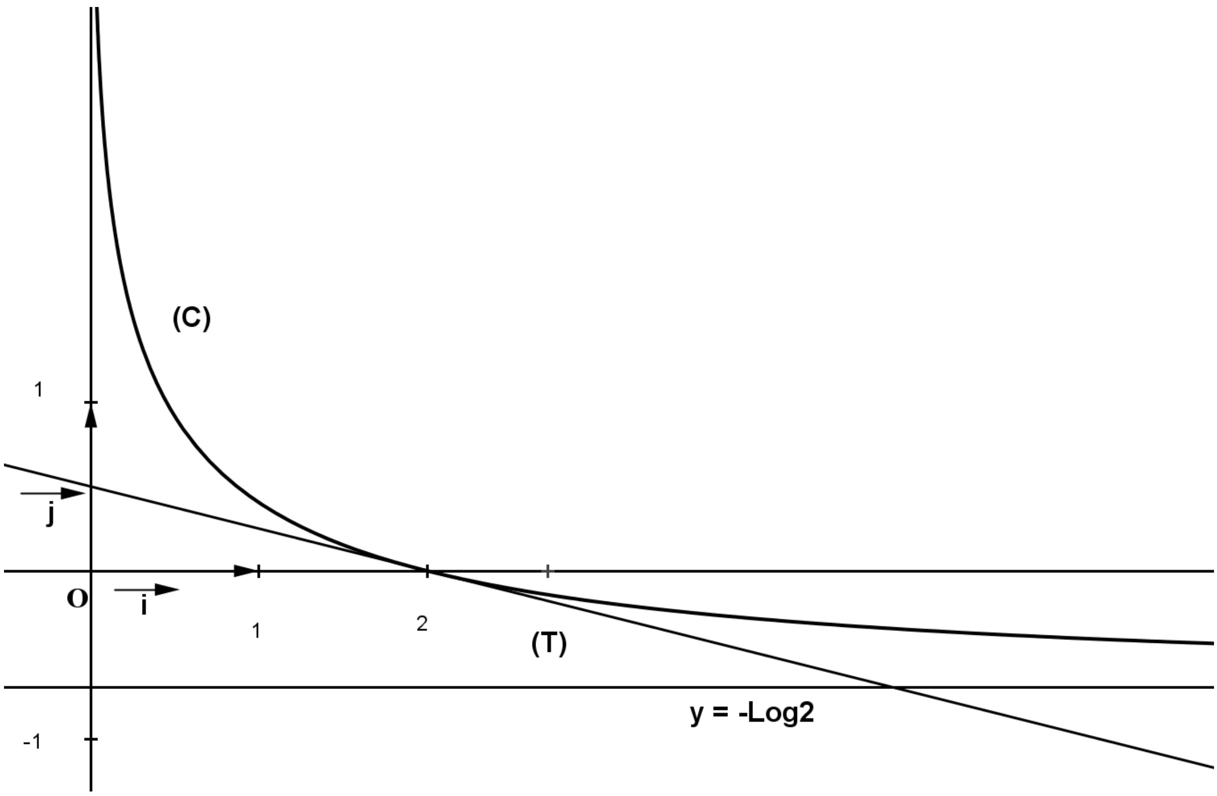
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	
f	‖ $+\infty$ ↘	$-\text{Log}2$

c) (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2.

$(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$(T): y=-\dfrac{1}{4}(x-2)$

d) La courbe (C).



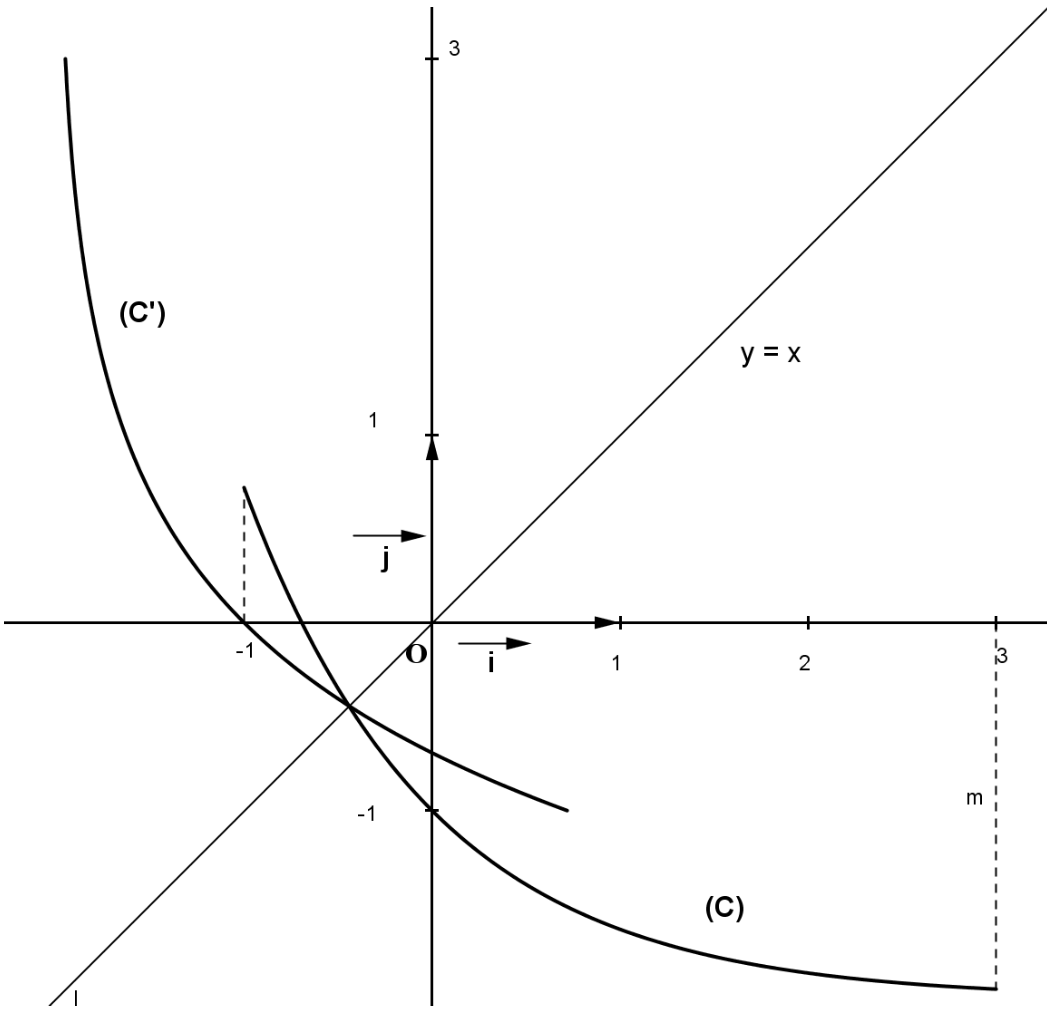
Exercice 4

$g(x) = e^{-x} - 2 \; ; \; x \in [-1 , 3]$

1)a) A partir de la courbe représentative de g, on peut remarquer que g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle I, d'où g réalise une bijection de I sur g(I)=J.

b) $g([-1 , 3]) = [g(3) , g(-1)] = \left[e^{-3} - 2 , e - 2\right] = J.$

c) (C') la courbe de g^{-1}.



2) La partie ombrée est la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1.$ Notons A l'aire de cette partie.

$A = \int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 (-e^{-x} + 2)dx = \left[e^{-x} + 2x\right]_0^1 = e^{-1} + 2 - 1 = e^{-1} + 1$ u.a