Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2014

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 4U_n + 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $U_1 = 4U_0 + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$

$U_2 = 4U_1 + 3 = 4 \times 11 + 3 = 47$

$U_1 - U_0 = 11 - 2 = 9$

$U_2 - U_1 = 47 - 11 = 36$

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{9}{2}$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{47}{11}$

b) On a $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$, d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

On a $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$, d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2) (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 1 + U_n$.

a) $V_{n+1} = 1 + U_{n+1} = 1 + 4U_n + 3 = 4 + 4U_n = 4(1 + U_n) = 4V_n$.

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison 4.

b) $V_0 = 1 + U_0 = 1 + 2 = 3$.

$V_n = V_0 \times 4^n = 3 \times 4^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 3 \times 4^n = +\infty$.

On a $V_n = 1 + U_n$, d'où $U_n = V_n - 1 = 3 \times 4^n - 1$ et $\frac{1}{U_n} = \frac{1}{3 \times 4^n - 1}$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{U_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3 \times 4^n - 1} = 0$.

Exercice 2

Dix élèves d'un lycée sportif ont été médaillés lors d'une compétition régionale.

	Judo	Escrime	Athlétisme
Filles	1	3	2
Garçons	2	1	1

Une association pour la promotion des sports individuels se charge de récompenser trois parmi ces dix élèves en leur payant un voyage à l'étranger.

A et B les évènements suivants :

A : « Les trois élèves récompensés sont du même sexe ».

B : « Les trois élèves récompensés ont la même spécialité sportive ».

1) Le nombre de cas possibles est $C_{10}^{3} = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$.

a) A : « Les trois élèves récompensés sont du même sexe ».

On a 6 filles et 4 garçons médaillés. Donc dans ce cas les récompensés vont être 3 parmi les 6 filles ou 3 parmi les 4 garçons.

$$p(A) = \frac{C_6^3 + C_4^3}{120} = \frac{20+4}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

b) B : « Les trois élèves récompensés ont la même spécialité sportive ».

Dans ce cas les récompensés vont être les 3 qui pratiquent le Judo ou 3 parmi les 4 qui pratiquent l'escrime ou les 3 qui pratiquent l'athlétisme.

$$p(B) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_3^3}{120} = \frac{1+4+1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

L'évènement $A \cap B$: « Les trois élèves récompensés sont du même sexe et ont la même spécialité ». Cela correspond au seul cas : les trois élèves récompensés sont les 3 filles qui pratiquent l'escrime. D'où $p(A\cap B) = \dfrac{1}{120}$.

c) L'évènement : « Les trois élèves récompensés sont du même sexe ou de même spécialité sportive » est l'évènement $A \cup B$.

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{120} = \frac{24+6-1}{120} = \frac{29}{120}.$$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de trois élèves récompensés, associe le nombre de filles figurant dans le groupe.

a) Les valeurs possibles prises par X : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

b) Le groupe soit composé uniquement de garçons correspond à la valeur 0 prise par X.

C'est-à-dire que les trois élèves récompensés sont parmi les 4 garçons.

$$p(X=0)=\frac{C_4^3}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}.$$

c) On a :

- $(X=1)$: une seule fille parmi le groupe des élèves récompensés.
  Cela veut dire une fille et deux garçons sont récompensés.
  $$p(X=1)=\frac{C_6^1\times C_4^2}{120}=\frac{6\times 6}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}.$$
- $(X=2)$: deux filles parmi le groupe des élèves récompensés.
  Cela veut dire deux filles et un garçon sont récompensés.
  $$p(X=2)=\frac{C_6^2\times C_4^1}{120}=\frac{15\times 4}{120}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$
- $(X=3)$: le groupe des élèves récompensés est formé de 3 filles.
  Cela veut dire aussi qu'aucun garçon n'est récompensé.
  $$p(X=3)=\frac{C_6^3}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}.$$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

d) $E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{10}+1+\frac{1}{2}=\frac{3+10+5}{10}=\frac{18}{10}=1{,}8.$

Exercice 3

f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\text{Log}x.$

C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\text{Log}x\right)=+\infty$; car $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\text{Log}x=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, d'où la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale pour la courbe C.

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\text{Log}x\right)=-\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}x=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\text{Log}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\text{Log}x}{x}\right)=0$; car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{Log}x}{x}=0.$

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ d'où la courbe C admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{i})$.

3)a) $f(x)=\frac{1}{x}-\text{Log}x$; $x\in\left]0,+\infty\right[$.

f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et $f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\text{Log}x\right)'=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-1}{x^2}-\frac{x}{x^2}=-\frac{1+x}{x^2}$.

b) $f'(x)=-\frac{1+x}{x^2}$, $x\in\left]0,+\infty\right[$.

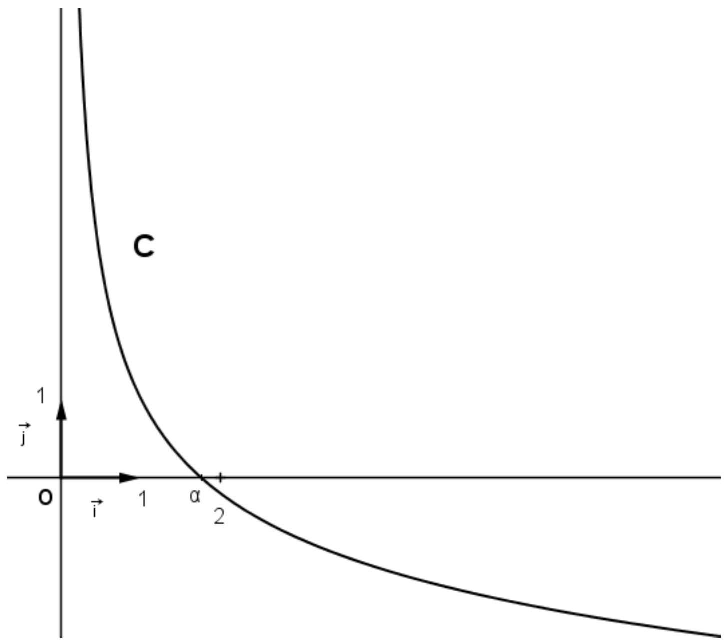
On a On a $1+x>0$ et $x^2>0$, d'où $f'(x)<0$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

4)a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left]0,+\infty\right[$, d'où f est une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\mathbb{R}$. D'où il existe un réel unique α tel que $f(\alpha)=0$.

b) $f(1)=\frac{1}{1}-\text{Log}1=1-0=1>0$; $f(2)=\frac{1}{2}-\text{Log}2<0$ d'où $\alpha\in\left]1,2\right[$.

5) La courbe C de f :



6)a) $F(x)=x+(1-x)\text{Log}x$; $x\in\left]0,+\infty\right[$.

On a F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et on a :

$$F'(x)=1-\text{Log}x+(1-x)\frac{1}{x}=1-\text{Log}x+\frac{1}{x}-1=\frac{1}{x}-\text{Log}x=f(x).$$

D'où F est une primitive de f sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

$$A = \int_1^\alpha f(x)dx = [F(x)]_1^\alpha = F(\alpha) - F(1) = F(x) = \alpha + (1-\alpha)\text{Log}\alpha - 1 \text{ unité d'aire.}$$

c) On a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \text{Log}\,\alpha = 0$

$$\Leftrightarrow \text{Log}\alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

$$A = \int_1^\alpha f(x)dx = \alpha + (1-\alpha)\text{Log}\alpha - 1 = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{\alpha} - 1 = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}.$$