REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◇◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 2 H Coefficient :1
Section : Sport	**Session principale**

Exercice 1 (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 4U_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 , U_2 , $U_1 - U_0$, $U_2 - U_1$, $\dfrac{U_1}{U_0}$ et $\dfrac{U_2}{U_1}$.

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 1 + U_n$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 4.

b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{U_n}$.

Exercice 2 (7 points)

Dix élèves d'un lycée sportif ont été médaillés lors d'une compétition régionale.
Ils sont répartis suivant le sexe et la spécialité sportive comme suit :

	Judo	Escrime	Athlétisme
Filles	1	3	2
Garçons	2	1	1

Une association pour la promotion des sports individuels se charge de récompenser trois parmi ces dix élèves en leur payant un voyage à l'étranger.
On désigne par A et B les événements suivants :

A : « Les trois élèves récompensés sont de même sexe »

B : « Les trois élèves récompensés ont la même spécialité sportive »

1) a) Justifier que $P(A) = \dfrac{1}{5}$.

b) Calculer P(B) et $P(A \cap B)$.

c) En déduire que la probabilité que les trois élèves récompensés soient de même sexe ou de même spécialité sportive est $\dfrac{29}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de trois élèves récompensés, associe le nombre de filles figurant dans le groupe.

a) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

b) Justifier que la probabilité que le groupe soit composé uniquement de garçons est égale à $\frac{1}{30}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

d) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 3 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\operatorname{Log} x$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire la nature de la branche infinie de la courbe C au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = -\frac{1+x}{x^2}$.

b) Dresser alors le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.

b) Justifier que $\alpha \in]1,2[$.

5) Tracer la courbe C.

6) a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=x+(1-x)\operatorname{Log} x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Calculer $\mathscr{A}$.

c) En remarquant que $\operatorname{Log}(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$, montrer que $\mathscr{A} = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.