Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2015

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $U_1 = \dfrac{1}{2}U_0 + 1 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 1 = 3$

$U_2 = \dfrac{1}{2}U_1 + 1 = \dfrac{1}{2} \times 3 + 1 = \dfrac{5}{2}$

b) $U_1 - U_0 = 3 - 4 = -1$

$U_2 - U_1 = \dfrac{5}{2} - (-1) = \dfrac{7}{2}$

On a $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$, d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

$\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{3}{4}$; $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\frac{5}{2}}{3} = \dfrac{5}{6}$.

On a $\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$, d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2)a) Montrons par récurrence que $U_n > 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $U_0 = 4 > 2$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $U_n > 2$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

On a $U_n > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}U_n > 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}U_n + 1 > 2$

$\Rightarrow U_{n+1} > 2$

D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $U_n > 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2}U_n + 1 - U_n = 1 - \dfrac{1}{2}U_n = \dfrac{1}{2}(2 - U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2}(2 - U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$, d'où $U_{n+1} - U_n < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite $U_{n+1} < U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (U_n) est décroissante.

d) On a $U_n < 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire la suite (U_n) est majorée par 4.

La suite (U_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

3)a) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}U_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n - 1 = \frac{1}{2}(U_n - 2) = \frac{1}{2}V_n.$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $V_0 = U_0 - 2 = 4 - 2 = 2.$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 2$.

On a $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = \frac{1}{2^n} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (U_n - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 2$$

Exercice 2

Une urne contient 5 jetons : 3 noirs et 2 blancs.
On tire simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.

1) Soit Ω l'univers des cas possibles. On a $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10.$

A : « Obtenir deux jetons noirs ».
C'est-à-dire tirer les deux jetons parmi les 3 noirs.

$p(A) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}.$

B : « Obtenir un seul jeton noir ».
C'est-à-dire tirer un jeton noir parmi les 3 noirs, et un jeton blanc parmi les deux blancs.

$p(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{10} = \frac{3\times 2}{10} = \frac{6}{10}.$

C : « Obtenir deux jetons blancs ».
C'est-à-dire tirer les deux jetons blancs.

$p(C) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}.$

2) Soit X l'aléa numérique qui, à chaque tirage des deux jetons, associe le nombre de jetons noirs tirés.

a) Lors d'un tirage de deux jetons, on peut obtenir 1 jeton noir ou deux jetons noirs ou aucun jeton noir. D'où $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$(X = 0)$: « Aucun jeton noir est tiré », cela veut dire « obtenir deux jetons blancs »

$(X = 0)$ est l'évènement C. $p(X = 0) = p(C) = \frac{1}{10}.$

$(X = 1)$: « Obtenir un jeton noir »

$(X=1)$ est l'évènement B. $p(X=1)=p(B)=\frac{6}{10}$.

$(X=2)$: « Obtenir deux jetons noirs », $p(X=2)=p(A)=\frac{3}{10}$.

On peut résumer la loi de probabilité de l'aléa X dans le tableau suivant :

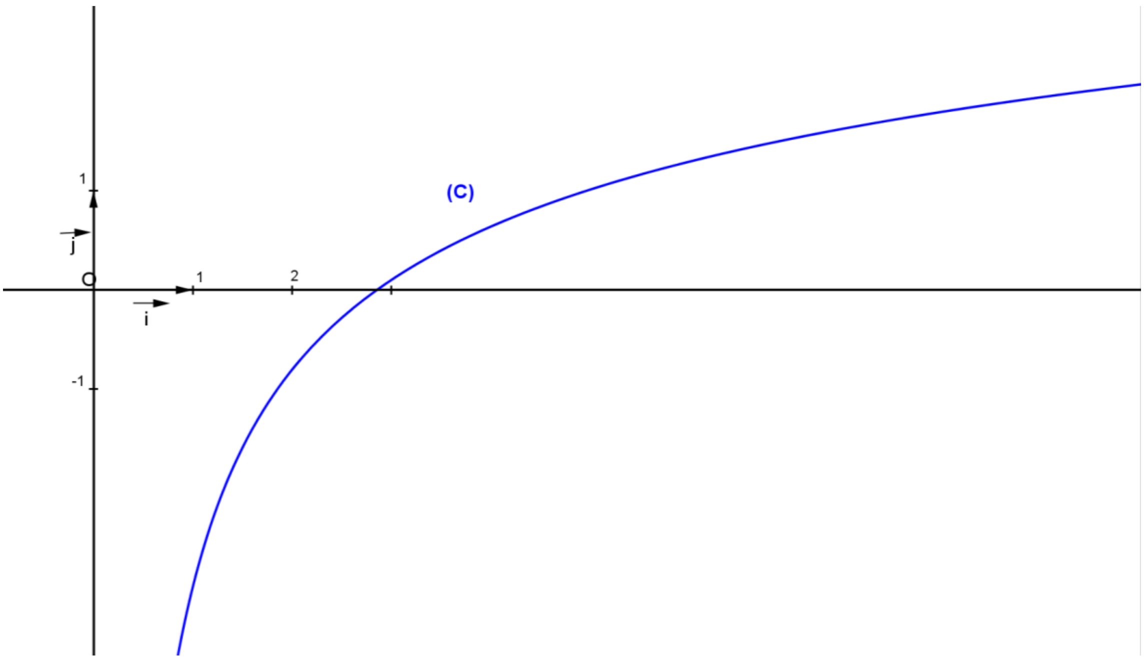
x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

b) L'espérance mathématique de X : $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2$.

Exercice 3

Dans le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) de la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\text{Log}(x)-\frac{3}{x}$.

- (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$
- L'axe des ordonnées est une asymptote à (C).



1)a) La courbe (C) de f coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc l'équation $f(x)=0$ admet, dans $]0,+\infty[$, une unique solution α.

b) $f(2{,}8)=\text{Log}(2{,}8)-\frac{3}{2{,}8}\simeq-0{,}042$; $f(2{,}9)=\text{Log}(2{,}9)-\frac{3}{2{,}9}\simeq0{,}030$. D'où $2{,}8<\alpha<2{,}9$.

2) $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \text{Log}(\alpha)-\frac{3}{\alpha}=0$

$\Leftrightarrow \text{Log}(\alpha)=\frac{3}{\alpha}$.

3) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $F(x)=(x-3)\text{Log}(x)-x$.

a) $F(3)=-3$.

b) La fonction $x \mapsto x-3$, la fonction $x \mapsto \text{Log}(x)$ et la fonction $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, d'où la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$F'(x) = (x-3)'\text{Log}(x) + (x-3)(\text{Log}(x))' - 1$$
$$= \text{Log}(x) + (x-3)\frac{1}{x} - 1 = \text{Log}(x) + 1 - \frac{3}{x} - 1 = \text{Log}(x) - \frac{3}{x} = f(x).$$

La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, d'où F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

4) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 3$.

$$\mathcal{A} = \int_\alpha^3 f(x)\,dx = [F(x)]_\alpha^3 = F(3) - F(\alpha) = -3 - ((\alpha-3)\text{Log}(\alpha) - \alpha)$$
$$= -3 - \left((\alpha-3)\frac{3}{\alpha} - \alpha\right) + = -3 - \left(3 - \frac{9}{\alpha} - \alpha\right) = -6 + \frac{9}{\alpha} + \alpha = \frac{\alpha^2 - 6\alpha + 9}{\alpha} = \frac{(\alpha-3)^2}{\alpha} \text{ unité d'aire.}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x-2}$. (ζ) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, d'où l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2}\frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{j})$. au voisinage de $+\infty$.

2)a) $f(x) = e^{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = (x-2)'\,e^{x-2} = e^{x-2} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Soit (T) la tangente à la courbe (ζ) au point d'abscisse 2.

$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$(T) : y = e^0(x-2) + e^0 = x - 2 + 1 = x - 1$. D'où $(T) : y = x - 1$.

4) La courbe (ζ) de f.