

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (6 points)

Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Calculer U_1 et U_2 .

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(2 - U_n)$.

c) Montrer alors que la suite (U_n) est décroissante.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 2 (5 points)

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher : 3 noirs et 2 blancs.

On tire simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux jetons noirs ».

B : « Obtenir un seul jeton noir ».

C : « Obtenir deux jetons blancs ».

2) Soit X l'aléa numérique qui, à chaque tirage des deux jetons, associe le nombre de jetons noirs tirés.

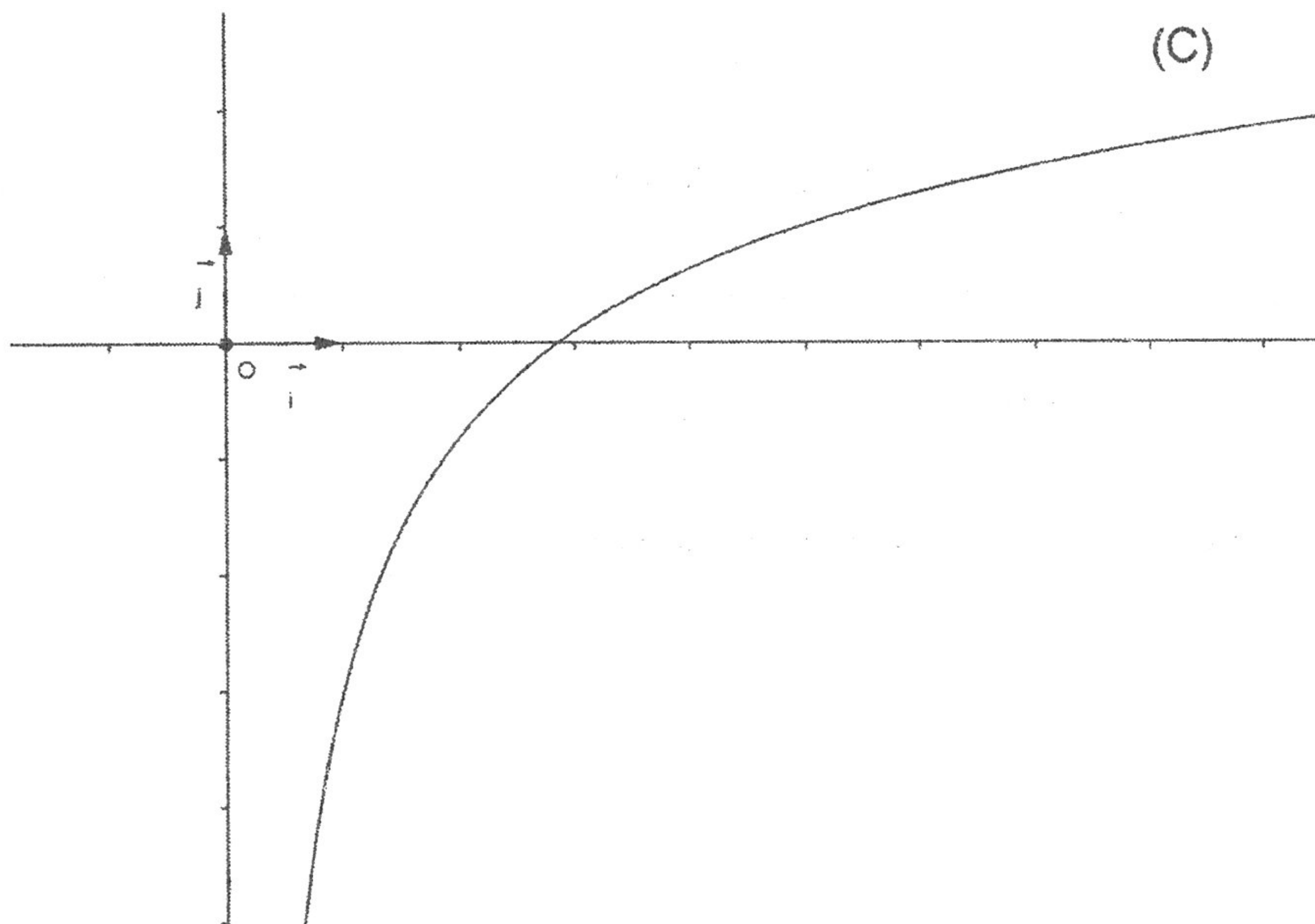
- Donner la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 3 (4 points)

Dans le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe

(C) de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \text{Log}(x) - \frac{3}{x}$.

- (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction (O, \vec{i}) .
- L'axe des ordonnées est une asymptote à (C).



1) a) En utilisant le graphique, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution α .

b) Vérifier que $2,8 < \alpha < 2,9$.

2) Montrer que $\text{Log}(\alpha) = \frac{3}{\alpha}$.

3) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $F(x) = (x - 3)\text{Log}(x) - x$.

a) Calculer $F(3)$.

b) Montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 3$.

Montrer que $\mathcal{A} = \frac{(\alpha - 3)^2}{\alpha}$.

Exercice 4 (5points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{x-2}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) En déduire la nature de la branche infinie de la courbe (ζ) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) Soit (T) la tangente à la courbe (ζ) au point d'abscisse 2.

Montrer qu'une équation de (T) est : $y = x - 1$.

4) Tracer (T) et (ζ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .