

Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session de contrôle

Exercice 1

- 1) c)
- 2) b)
- 3) a)
- 4) b)

Exercice 2

1) Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \frac{x-1}{4x-3}$.

a) $f'(x) = \frac{-3+4}{(4x-3)^2} = \frac{1}{(4x-3)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Comme f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $f(x) - x = \frac{x-1}{4x-3} - x = \frac{x-1-x(4x-3)}{4x-3} = \frac{-(2x-1)^2}{4x-3}$.

$4x-3 < 4 \times \frac{1}{2} - 3$ donc $4x-3 < 0$ et par suite $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2)

a) Montrons que pour tout pour $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Par récurrence

Pour $n=0$, $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

$u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et par suite $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

D'où pour tout pour $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrons que (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ car $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est convergente

vers une limite l .

On a :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{Pour tout } n, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ est convergente vers } l. \end{array} \right\}$$

$$\text{Donc } l = f(l) \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow \frac{(2l-1)^2}{4l-3} = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$$

Exercice 3

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-1, 3, 2)$.

1) .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$

donc le triangle ABC est rectangle en A .

$$2) \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ On a } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AD}$$

Par suite $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} sont colinéaires et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC)

donc \overrightarrow{AD} est normal à (ABC) .

3) Le volume V du tétraèdre $DABC$.

$$V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{3}{2} AD^2 \right| = \frac{0+4+4}{4} = 2$$

4) Soit I , J et K les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$.

On considère le plan Q passant par I et parallèle au plan (ABC) .

$$a) I(-1, 2, 1) \text{ et } (ABC) // Q \text{ donc } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est normal à } Q \text{ par suite}$$

$$Q: 0x + 2y + 2z + d = 0,$$

$$I(-1,2,1) \in Q \text{ donne } 2 \times 2 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$$

$$\text{Donc } Q: y + z - 3 = 0$$

$$\text{b) } J(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \in Q \text{ car } \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = 0 \text{ et } K(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \in Q \text{ car } \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 3 = 0.$$

c) V' le volume du tétraèdre DIJK.

$$V' = \frac{1}{6} \left| \left(\begin{matrix} \vec{IJ} \wedge \vec{IK} \\ \vec{ID} \end{matrix} \right) \right| \text{ or } \vec{AB} = 2 \vec{IJ} \text{ et } \vec{AC} = 2 \vec{IK} \text{ et } \vec{AD} = 2 \vec{ID}$$

$$\text{Ainsi } V = \frac{1}{6} \left| \left(\begin{matrix} \vec{AB} \wedge \vec{AC} \\ \vec{AD} \end{matrix} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \left(\begin{matrix} 2 \vec{IJ} \wedge 2 \vec{IK} \\ 2 \vec{ID} \end{matrix} \right) \right| = 8V'$$

Exercice 4

1) a) D'après le graphique, $g(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$; $g(x) > 0$ pour $x \in]1, +\infty[$ et $g(1) = 0$.

b) pour $x \in]0, 1[$, $(x-1) < 0$ et $g(x) < 0$ donc $(x-1)g(x) \geq 0$

pour $x \in]1, +\infty[$, $(x-1) > 0$ et $g(x) > 0$ donc $(x-1)g(x) \geq 0$

pour $x=1$. $(x-1)g(x) = 0$

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(x-1)g(x) \geq 0$

2) On donne $g(x) = 2 \ln(x) + \frac{x-1}{x}$ et $f(x) = (x-1)^2 \ln(x) + x-1$.

$$\text{a) } f'(x) = 2(x-1) \ln x + (x-1)^2 \times \frac{1}{x} + 1 = (x-1) \left(2 \ln x + \frac{x-1}{x} \right) + 1 = (x-1)g(x) + 1$$

b) Tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 \ln x + x - 1 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 \ln x + x - 1 = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) Soit (T) la tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 1.

a) $f(1) = 0$; $f'(1) = (1-1)g(1) + 1 = 1$ donc (T) a pour équation : $y = x-1$.

b) Position relative de (C_f) et (T) .

$$f(x) - (x-1) = (x-1)^2 \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-(x-1)$	-	0	+
$f(x)$	(T) / (C_f)		(C_f) / (T)

c) La courbe (C_f) .

