Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session principale

Exercice 1

1)	2)	3)i)	3)ii)
c)	a)	b)	c)

Exercice 2

1) Soit la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}; \ \textit{pour tout} \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) $u_1 = \dfrac{4\times 1}{1+1} = 2$ et $u_2 = \dfrac{4\times 2}{1+2} = \dfrac{8}{3}$

b) Montrons par récurrence que pour tout n de IN , $0 < u_n < 3$.

- Pour n=0 ; $u_0=1$ et $0 < u_0 < 3$.
- Soit $n \in IN$, supposons que $0 < u_n < 3$, démontrons que $0 < u_{n+1} < 3$.

On a $u_n > 0$ donc $\dfrac{4u_n}{1+u_n} > 0$ et par suite $u_{n+1} > 0$.

D'autre part $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - 3 = \dfrac{4u_n - 3(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{u_n - 3}{1+u_n}$.

Comme $0 < u_n < 3$ alors $\dfrac{u_n - 3}{1+u_n} < 0$ et par suite $u_{n+1} < 3$.

D'où $0 < u_{n+1} < 3$.

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $0 < u_n < 3$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{4u_n - 3(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{4u_n}{1+u_n}}$$

$$= \frac{u_n - 3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n$$

D'où (v_{n}) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2$ et $v_n = v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n} = 1 - \frac{3}{u_n}$ d'où $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$ et par suite $\frac{u_n}{3} = \frac{1}{1 - v_n}$ ainsi $u_n = \frac{3}{1 - v_n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

3) $w_n = \frac{3}{u_n}$

a) $1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 3}{u_n} = \frac{u_n - u_n + 3}{u_n} = \frac{3}{u_n} = w_n$

b) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} w_k = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (1 - v_k) = n + 1 - \sum\limits_{k=0}^{k=n} v_k$

$\sum\limits_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -2 \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{-8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ ce qui donne

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{3n}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = 1.$

Exercice 3 (5 points)

1) $ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi+\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

2) Soit l'équation (E) : $z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.

$\Delta' = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 - 1 \times (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} + ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

$z' = e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z'' = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) aff(A)= $e^{i\frac{\pi}{3}}$, aff(B)= $e^{i\frac{\pi}{12}}$. On a aff(C)= aff(A) + aff(B) , donc $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et par suite $OACB$ est un parallélogramme. On a de plus $OA=OB$ donc $OACB$ est un losange.

b)

c) L'aire du losange $OACB=\dfrac{AB\times OC}{2}$.

$AB=\left|e^{i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=|z'|$ et $OC=\left|e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=|z''|$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation (E)

et on remarque que $z'z''=p=\dfrac{c}{a}$

Donc l'aire de $OABC$= $=\dfrac{|z'z''|}{2}=\dfrac{\left|(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}\right|}{2}=\dfrac{|(1-i)|\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4

$f(x)=(1+x)e^{-x}$.

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+xe^{-x})=0$.

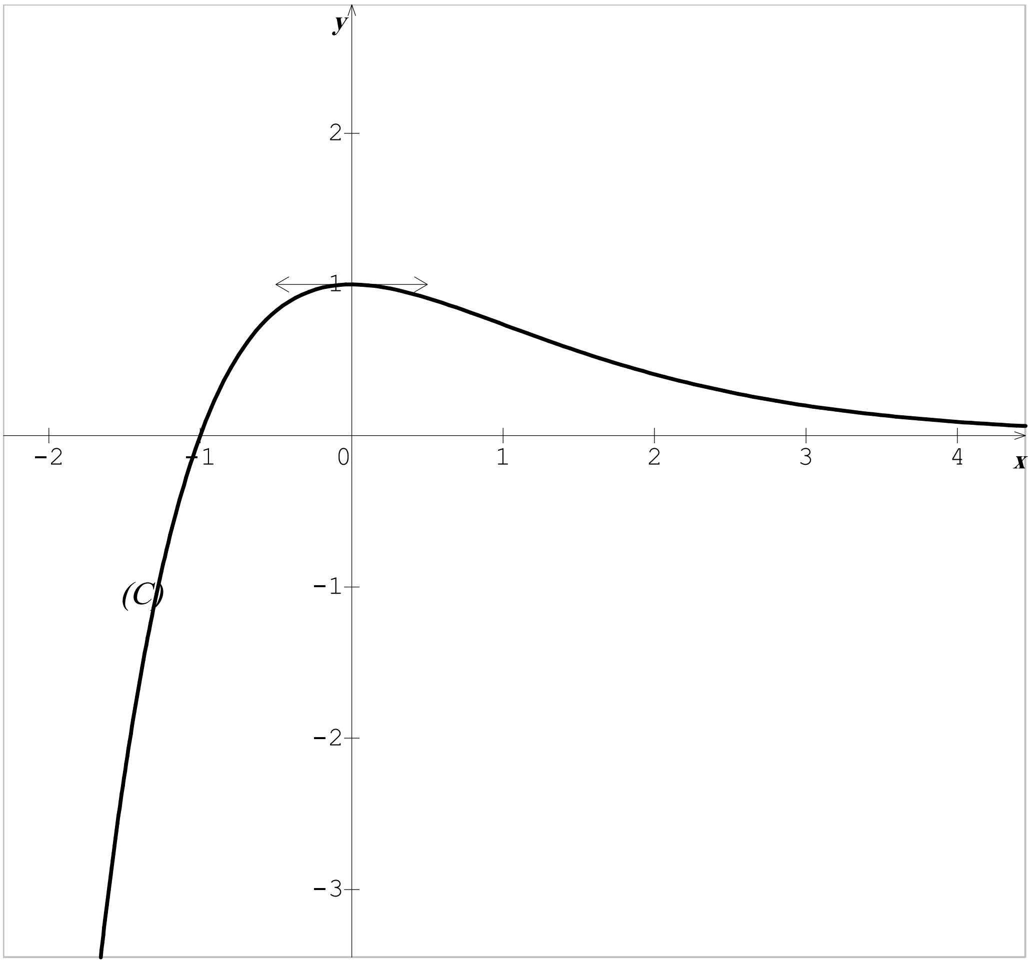
b) $f'(x)=1\times e^{-x}+(1+x)(-e^{-x})=e^{-x}-e^{-x}-xe^{-x}=-xe^{-x}$.

c) Tableau de variation de f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)}{x}e^{-x}=1\times 0=0$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

b) La courbe (C).



3) .

a) $A_n = \int_0^n f(x)dx = \int_0^n (1+x)e^{-x}dx$

Intégration par parties :

$u(x) = 1+x \qquad ;u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \qquad ;v(x) = -e^{-x}$

$$A_n = \int_0^n (1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n + \int_0^n e^{-x}dx = -(1+n)e^{-n} + 1$$

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n)e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-n} + ne^{-n}) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -(1+n)e^{-n} + 1 = 1$.