Examen du baccalauréat (Juin 2012)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session principale

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
c)	a)	a)	c)

Exercice 2

On considère les points A$(2,1,1)$ B$(1,1,0)$ C$(1,0,1)$

1/a/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\square\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{A\square}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{\square C}\neq\vec{0}$ donc A, B et C déterminent un plan.

b/ $\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{\square C}$ est un vecteur normal au plan P, d'où P : x – y – z +d = 0

comme A ∈ P, d = 0 et on trouve P : x- y – z = 0.

2/ D$(2,0,0)$.

a/ D ∉ P car 2 ≠ 0 donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

b/ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ V = $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{\square D}\right|$ = $\frac{1}{6}|-2|$ = $\frac{1}{3}$

3/ Soit (S) la sphère de centre I$\begin{pmatrix}\frac{3}{2,1}\\\frac{2,1}{2}\end{pmatrix}$ et passe par le point D.

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{\square}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\square}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}\frac{1}{\square}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{\square}{2}\end{pmatrix}$

IA =IB = ID = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc les points A et B appartiennent à (S).

b/ (S) et P contiennent les points A et B donc ils ne sont ni tangents ni disjoints par suite ils se coupent suivant un cercle $(\mathscr{C})$

c/ $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{□}{2}\end{pmatrix}$ IC = ID donc C appartient à (S)

A, B et C appartiennent à S∩P donc $(\mathscr{C})$ est circonscrit au triangle ABC.tel que

4/ a/ $\begin{cases}\Delta\perp P\\ I\in\Delta\end{cases}$ donc $\boxed{\Delta:\begin{cases}x=\frac{3}{2}-\alpha\\ y=\frac{1}{2}+\alpha\\ z=\frac{1}{2}+\alpha\end{cases}\ ;\ \alpha\in IR}$

b/ le centre du cercle est le projeté orthogonal de I sur P c'est Ω.

Ω ∈ Δ∩P $\Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases}x=\frac{3}{2}-\alpha\\ y=\frac{1}{2}+\alpha\\ z=\frac{1}{2}+□\\ x-y-z=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{6}\\ x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{2}{3}\\ z=\frac{2}{3}\end{cases}$

d'où $\boxed{\Omega\begin{pmatrix}\frac{4}{3,2}\\ \frac{3,2}{3}\end{pmatrix}}$

c/ D'= $S_\Omega(□)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x_{D'}=2□_\Omega-x_D\\ y'_D=2y_\Omega-y_D\\ z'_D=2z_\Omega-z_D\end{cases}$ nn $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x'_D=\frac{□}{3}-2=\frac{2}{3}\\ y'_D=\frac{4}{3}\\ z'_D=\frac{4}{3}\end{cases}$ donc $\boxed{D'\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)}$

On pose V'= Volume du tétraèdre D'ABC

$\overrightarrow{AD'}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$; V'=$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A□}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD'}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right|$ d'où : $\boxed{V'=V=\frac{1}{□}}$

Exercice n°3

1/a/ f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[1,+\infty[$

sur $f([1,+\infty[) =]-\infty,1]$; $0 \in]-\infty,1]$ et $f(1) \neq 0$

Par suite l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1,+\infty[$.
$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2-\alpha+\ln\alpha = 0$

b/ f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

x	1		α		+∞
f(x)		+	0	−	

2/

a/ Démonstration par récurrence

* $u_0 = 1$ donc $1 \le u_0 \le \alpha$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \le u_n \le \alpha$

donc $\ln 1 \le \ln u_n \le \ln\alpha$ d'où $2 \le 2+\ln u_n \le 2+\ln\alpha$

Comme $\ln\alpha = \alpha - 2$ donc $1 \le u_{n+1} \le \alpha$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1 \le u_n \le \alpha$

b/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2+\ln u_n - u_n = f(u_n)$
$f(u_n) \ge 0$ car $1 \le u_n \le \alpha$ donc (u_n) est croissante.

c/ * La suite (u_n) est croissante et majorée par α elle converge vers un réel ℓ.

* Soit g la fonction définie et continue sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = 2+\ln x$

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n)=u_{n+1}$

* (u_n) converge vers ℓ et g est continue en ℓ

Donc $g(\ell) = \ell$

Ce qui donne $g(\ell) - \ell = 0$ d'où $f(\ell) = 0$ Ainsi (u_n) converge vers α.

Exercice n°4 :

1/a/ Par lecture graphique

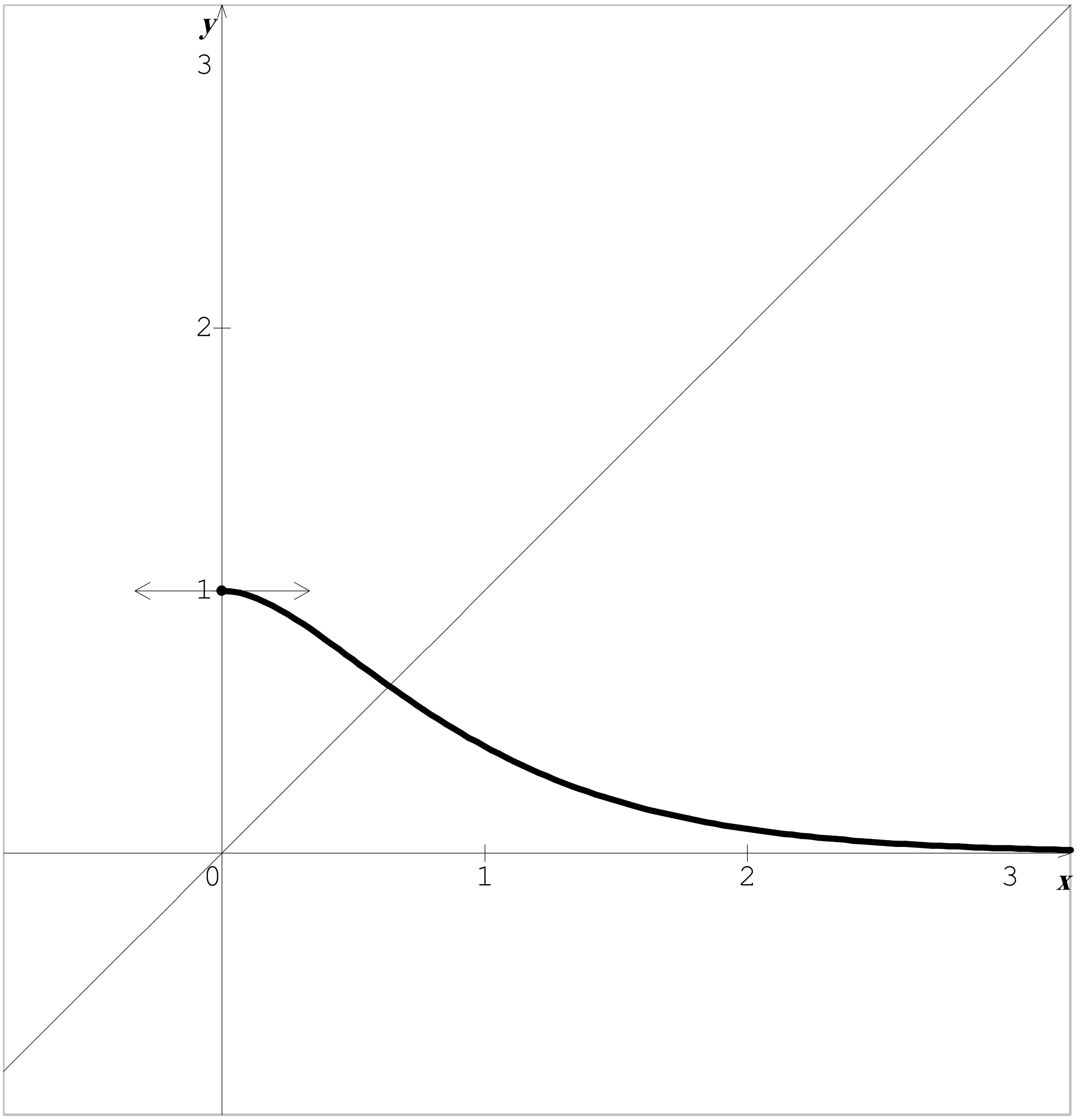
* $f(0) = 1$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

* $f_d'(0) = 0$

b/ * f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) =]0,1]$.

2/



3/ f(x) = $(ax+b)e^{-2\square}$, x ∈ [0,+∞[, a et b ∈ IR

a/ $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} b = 1 \\ a - 2\square = 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} b = 1 \\ a = \square \end{cases}$

Donc, pour tout x ∈ [0,+∞[, f(x) = (2x + 1)e^{-2x}

b/ I = $\int_0^{\beta} (2x+1)e^{-2\square}\,dx$

Intégration par parties:

On pose u(x) = 2x+1 ; u'(x) = 2

v'(x) = $e^{-2\square}$; v(x) = $-\frac{1}{2}e^{-2\square}$

I = $\left[-\frac{1}{2(2x+1)e^{-2x}}\right]_0^{\beta} - \int_0^{\beta} -\square^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-\square x}\right]_0^{\beta}$

$$= -\frac{1}{2}(2\beta + 1)e^{-2\beta} - \frac{1}{2}e^{-2\beta} + 1$$

$$\boxed{I = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta}}$$

c/ $\mathcal{A} = \int_{\beta}^{1} f^{-1}(x)\,dx = I - \beta^2$

avec β^2 est l'aire du carré de côté β.

D'où $A = 1 - (1+\beta)e^{-2\beta} - \beta^2$