REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section : **Sciences Techniques**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Le sujet comporte 03 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, -2)$, $C(0, 1, -2)$ et le plan $(P) : x + y - z - 3 = 0$.

1) Vérifier que A, B et C appartiennent au plan (P).

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que (P) et (S) se coupent suivant le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan (P).

a) Montrer qu'un système paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G du plan (P) et la droite Δ.

c) Vérifier que G est le centre de gravité du triangle ABC.

d) En déduire le centre et le rayon du cercle (C).

Exercice 2 (4 points)

1) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

a) Montrer que : pour tout $x \geq 1$; $f(x) \leq x$ et que pour tout $0 \leq x \leq 1$; $f(x) \geq x$.

b) Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 (5 points)

Les résultats du baccalauréat, dans un établissement publique donné , sont :

- 60% des candidats sont admis.
- Parmi les candidats admis, 80% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.
- Parmi les candidats non admis, 70% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.

On interroge, au hasard, un candidat au baccalauréat de cet établissement et on désigne A et M les événements suivants :

A « le candidat interrogé est admis au baccalauréat ».

M « la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 ».

1) a) Déterminer $p(\overline{A})$, $p(M / A)$ et $p(M / \overline{A})$.

b) Justifier que $p(\overline{M} / A) = \dfrac{1}{5}$

2) Construire l'arbre pondéré décrivant cette situation.

3) a) Calculer la probabilité qu'un candidat interrogé soit admis et que sa moyenne annuelle soit inférieure à 10 sur 20.

b) Montrer que $p(M) = 0.76$

c) Calculer la probabilité qu'un candidat interrogé soit admis sachant qu'il a obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10.

4) On sait que le nombre de candidats de cet établissement est égal à 200.

Donner une estimation du nombre de candidats admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10.

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0\,,\ +\infty\,[$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln(x) & \text{si } x \in \,]0\,,\ +\infty\,[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Déterminer la nature de la branche infinie de (C) .

3) a) Montrer que pour tout $x \in \,]0,+\infty[$; $f'(x) = -4x\ln(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.

5) Construire (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On précisera en particulier la tangente à (C) au point O.

6) Soit λ un réel tel que : $0<\lambda<\sqrt{e}$.

a) En utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e}$

b) Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\sqrt{e}$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.

c) Montrer que $\lim_{\lambda\to 0^+} \mathcal{A}(\lambda)=\frac{2}{9}e\sqrt{e}$.