RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Sciences Techniques** Durée : 3h — Coefficient : 3 **Session de contrôle**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice N° 1 (4 points)

1) a) Calculer $(3+i)^2$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1-3i)z-4-3i=0$.

2) Soit $P(z)=z^3-(4+3i)z^2-(9-12i)z+20+15i$.

   a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=1+2i$, $z_B=-2+i$,
   $z_C=-z_B$ et $z_D=5$.

   a) Placer les points A, B, C et D.

   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

4) a) Mettre sous forme cartésienne $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$.

   b) Déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle.

   c) Calculer la distance AC et déduire l'aire du parallélogramme ABCD.

Exercice N° 2 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,2,0)$ et $I(0,1,-3)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+2z-1=0$.

2) Soit S la sphère de centre le point I et passant par le point A.

   a) Montrer que S passe par le point C.

   b) Montrer que l'intersection du plan P et de la sphère S est le cercle (C) de centre le point B et de rayon $\sqrt{5}$.

3) α étant un réel, on considère l'ensemble S_α des points $M(x,y,z)$ tels que :

   $x^2+y^2+z^2-2y-2\alpha z-1=0$.

   a) Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(0,1,\alpha)$ et de rayon $R_\alpha=\sqrt{2+\alpha^2}$.

b) Montrer que la sphère S_α passe par les points A et C.

c) En déduire que pour tout réel α, le plan P coupe la sphère S_α selon un cercle (C_α).

4) a) Soit r_α le rayon du cercle (C_α).

Montrer $r_\alpha = \sqrt{5}$ si et seulement si $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$.

b) Justifier que les centres des cercles (C_{-3}) et (C_3) sont respectivement le point B et un point B' dont on déterminera les coordonnées.

c) Vérifier que ABCB' est un losange.

Exercice N° 3: (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{5}(x + e^{-x})$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{4}{5}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution α et que $\alpha \in]1,2\,;1,3[$.

4) soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$.

c) Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

e) Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} prés.

Exercice 4 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (x-1)e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

c) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote pour la courbe (C) au voisinage de $(-\infty)$.

d) Etudier les positions relatives de la droite Δ et la courbe (C).

2) On donne ci-après le tableau de variations de la fonction f' (fonction dérivée de la fonction f)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Justifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point I.

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α et que $\alpha \in]0,8\,;0,9[$.

c) Tracer la droite Δ et la courbe (C).

4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer $\mathscr{A}$.