



Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) a) Vérifier que : $-7 - 4i\sqrt{2} = (1 - 2i\sqrt{2})^2$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^2 + z + 2 + i\sqrt{2} = 0$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i\sqrt{2}$, $z_B = -1 + i\sqrt{2}$ et $z_C = \overline{z_A}$.

Montrer que C est un point du cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$.

3) A tout point M du plan d'affixe z distinct de chacun des points A et B, on associe le point M'

d'affixe z' tel que $z' = \frac{z + 1 - i\sqrt{2}}{z + i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$.

b) Montrer que si $|z'| = 1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4) Soit E le point d'affixe $z_E = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$ et E' le point d'affixe $z_{E'} = \frac{z_E + 1 - i\sqrt{2}}{z_E + i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que $z_{E'} = -i$.

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle (\mathcal{C}) .

Exercice 2 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(0, -1, 0), B(1, 1, 0) et C(0, 0, 1).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.

c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $2x - y + z - 1 = 0$.

2) On considère le plan $Q: x + y - 2z + 1 = 0$. Montrer que les plans P et Q sont sécants et que leur

intersection est la droite $\Delta: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 5\alpha - 1 \\ z = 3\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + \frac{4}{3} = 0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre le point $I(-1, 0, 1)$. Déterminer son rayon.

b) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des plans P et Q.

4) Soient J et K les points de contact respectifs de la sphère S avec les plans P et Q.

a) Justifier que le plan (IJK) est perpendiculaire à chacun des plans P et Q.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $x + 5y + 3z - 2 = 0$.

c) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des plans P, Q et (IJK).

Exercice 3 : (4 points)

Une entreprise fabrique deux types de circuits électriques, 40% sont de type A et 60% de type B.

Des statistiques ont prouvé que :

2% des circuits de type A présentent un défaut.

1% des circuits de type B présentent un défaut.

1) On choisit un circuit au hasard et on désigne par A, B et D les évènements :

A : « le circuit est de type A »

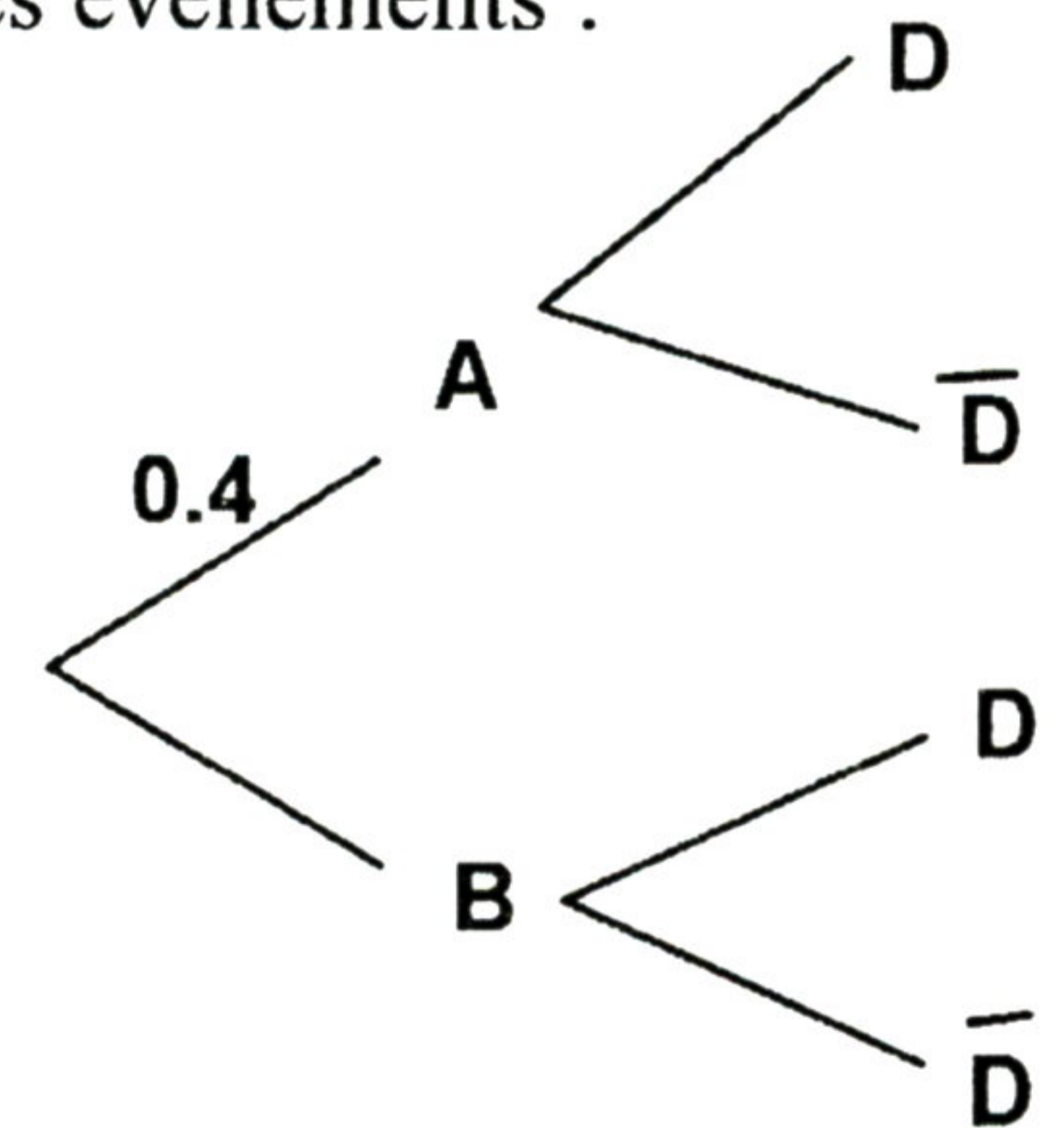
B : « le circuit est de type B »

D : « le circuit présente un défaut ».

a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre :

b) Montrer que $p(D) = 0,014$

c) Un circuit choisi au hasard présente un défaut.



Quelle est la probabilité qu'il soit de type A ? (on arrondira le résultat à 10^{-3} près).

2) L'usine fabrique chaque semaine 10000 circuits. Tous les circuits sans défaut sont vendus et fournissent chacun un bénéfice net de $0,3DT$. Les circuits avec défaut sont détruits mais font perdre chacun $0,5DT$ à l'entreprise (matière première et coût de fabrication).

Déterminer le bénéfice moyen réalisé chaque semaine.

Exercice 4: (6 points)

- 1) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x + 1 - 2 \ln x$.
- Déterminer le sens de variations de la fonction g .
 - Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- b) Dresser le tableau de variations la fonction f .
- c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution β et que $\beta \in]0,56 ; 0,57[$.
- 4) Dans l'annexe, on a construit dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (Γ) de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$ et l'unique point d'inflexion A pour la courbe (C) ainsi que la tangente à (C) en ce point.
- Etudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ)
 - Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C) .
- 5) Soit I_λ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement supérieur à 1.
- Montrer que $I_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$.
 - Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$.

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve : mathématiques – Section : Sciences Techniques

Feuille à rendre avec la copie

