

Exercice 1 : (5 points)

1) a) $e^{i\frac{5\pi}{12}} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = e^{i(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$
 $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 2i \sin \frac{\pi}{4} e^{i\frac{5\pi}{12}} = i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \quad ; \quad \left(\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

b) $z_1^2 - (2i\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}) z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4i\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$
 $= 4(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}) - 4i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$
 $= 4i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} - 4i\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} = 0$

D'où z_1 est solution de l'équation(E)

c) $z_1 z_2 = -4 e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z_2 = \frac{-4 e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = -2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$

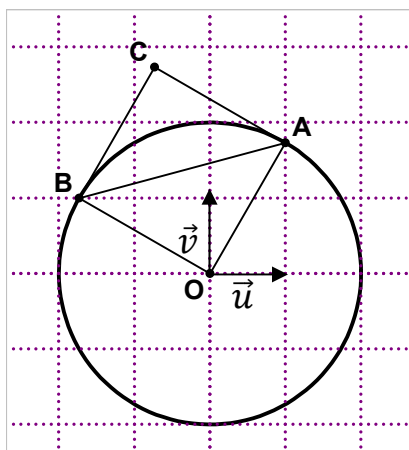
d) $z_1 = -2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3}$
 $z_2 = -2 e^{-i\frac{\pi}{6}} = -2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = -\sqrt{3} + i$

2) a) $iz_A = i(1 + i\sqrt{3}) = i - \sqrt{3} = z_B$

b) $\frac{\text{aff}(\overline{OB})}{\text{aff}(\overline{OA})} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{iz_A}{z_A} = i$ donc $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ainsi OAB est rectangle en O

$\left| \frac{z_B}{z_A} \right| = \frac{|z_B|}{|z_A|} = |i| = 1$ donc $|z_A| = |z_B|$ d'où $OA = OB$ et par suite OAB est isocèle en O

c)



3) a) $z_C - z_B = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - i = 1 + i\sqrt{3} = z_{\overline{OA}}$ donc $\overline{BC} = \overline{OA}$
 d'où OACB est un parallélogramme ; et comme le triangle OAB est isocèle et rectangle en O, donc OACB est un carré.

b) Voir figure ci-dessus.

c) OACB est un carré de cote 2 donc $OC = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\arg(z_C) &= (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi \\ &= \arg(z_A) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\end{aligned}$$

$$\text{d'où } z_C = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Exercice 2 : (4,5 points)

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ d'où \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AB} ne sont pas

colinéaires ; et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $P = (ABC)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P

Donc une équation de P est $-5x - 5z + d = 0$

$A(1,2,-1) \in P$ donc $-5 + 5 + d = 0$ ainsi $d = 0$

Et par suite P: $-5x - 5z + d = 0$ donc $x + z = 0$ est une équation cartésienne de P

2) $\Delta: \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2 \\ z = \alpha - 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

a) $A(1,2,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + 1 \\ 2 = 2 \\ -1 = \alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2 = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ donc $A \in \Delta$

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ . Comme \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires donc $\Delta \perp P$

3) $I_\alpha(1 + \alpha, 2, \alpha - 1) \in \Delta$

a) $d(I_\alpha, P) = \frac{|\alpha+1+\alpha-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\alpha|$

b) $d(I_\alpha, P) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha| > 2$ donc :

si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors le plan est extérieur à la sphère(S_α)

Si $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ alors le plan P est tangent à la sphère(S_α)

Si $\alpha \in]-2, 2[$ alors le plan P est sécant à la sphère(S_α)

4) a) $B(2,0,-2) \in S_\alpha$ donc $I_\alpha B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow I_\alpha B^2 = 8$

$$\Leftrightarrow (2 - \alpha - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (-2 - \alpha + 1)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (1 - \alpha)^2 + 4 + (-1 - \alpha)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 6 = 8$$

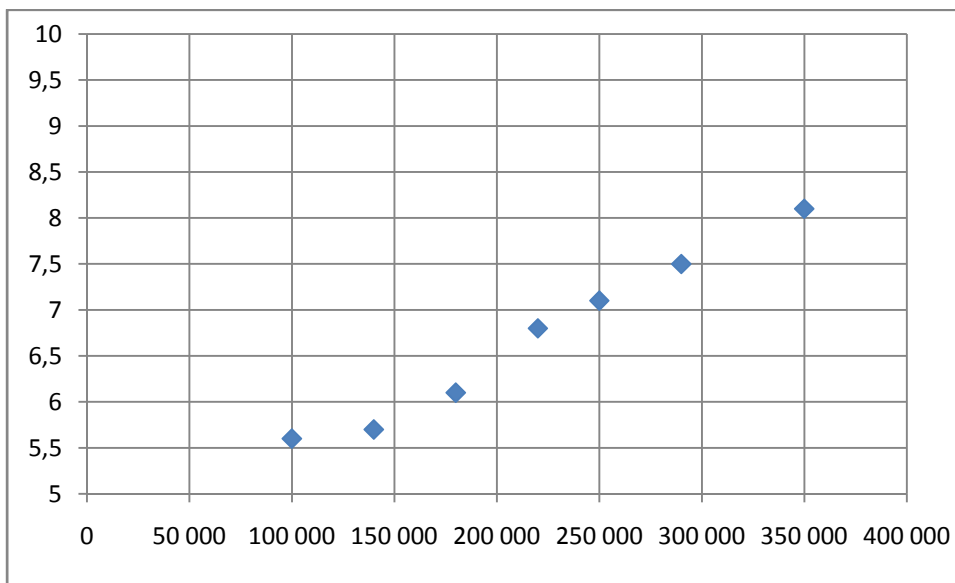
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

b) $-1 \in]-2,2[$ et $1 \in]-2,2[$ donc $S_\alpha \cap P$ ($\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$) est un cercle.

Comme $I_\alpha \in \Delta$ et $\Delta \perp P$ en A ; alors A est le projeté orthogonal de I_α sur P donc $S_\alpha \cap P$ est le cercle C_α de centre A et de rayon $r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{6}$

Exercice 3 :(4 points)

1) a)



b) $r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0,990$

c) le coefficient de corrélation $r > \frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut envisager un ajustement affine de la série(X, Y)

2) a) L'équation de la droite de régression de Y en X est :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \cong 1,078 \times 10^{-5} ; b = \bar{Y} - 1,078 \times 10^{-5} \times \bar{X} = 4,344$$

$$\text{D'où } y = 1,078 \times 10^{-5}x + 4,344$$

b) l'équation de la droite de régression de X en Y est : $x = a'y + b'$ avec :

$$a' = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} = 91011,236 \text{ et } b' = \bar{X} - 91011,236 \times \bar{Y} = -391203,853$$

$$\text{D'où } x = 91011,24y - 391203,85$$

3) $x = 400\,000$ donc la consommation $y = 1,078 \times 10^{-5} \times 400\,000 + 4,344 = 8,66$

4) $y > 8,5 \Leftrightarrow x > 91011,24 \times 8,5 - 391203,85 \Leftrightarrow x > 382391,69$

Exercice 4 : (6,5 points)

1) $h(x) = x - 1 + x \ln x ; x \in]0, +\infty[$

a) $h(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

b)

| | | | |
|--------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $h(x)$ | | 0 | + |

2) $f(x) = 1 + (x - 1) \ln x ; x \in]0, +\infty[$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + (x - 1) \ln x = +\infty.$

La courbe(C)admet une asymptote vertical d'équation $x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x - 1) \ln x = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+(x-1) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty$. La courbe(C)

admet un branche parabolique de direction celle de (o, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$

3) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[, f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \frac{x \ln x + x - 1}{x} = \frac{h(x)}{x}$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ le signe de $(f'(x))$ est celui du signe de $(h(x))$

| | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |

4) a) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + (x - 1) \ln x = x$

$\Leftrightarrow x - 1 - (x - 1) \ln x = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(1 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$

b) $f(x) \leq x \Leftrightarrow (x - 1)(1 - \ln x) \geq 0$

| | | | | |
|----------------------|---|---|-----|-----------|
| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
| $x - 1$ | | 0 | + | + |
| $1 - \ln x$ | + | + | 0 | - |
| $(x - 1)(1 - \ln x)$ | - | 0 | + | - |

D'où $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in [1, e]$

c) Position de (C) et Δ : $y = x$

$$x - f(x) = (x - 1)(1 - \ln x)$$

| | | | | | | |
|-------------------------------|---|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|---|---|
| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ | | |
| $x - f(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - |
| Position de (C) et Δ | | (C) est au dessus de Δ | (C) est au dessous de Δ | (C) est au dessus de Δ | | |

Les points de coordonnées $(1,1)$ et (e, e) sont les points d'intersection de (C) et Δ

5) Voir Annexe.

6) a) $\int_1^e (x \ln x) dx$; On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\text{Donc } \int_1^e (x \ln x) dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

b) $A = \int_1^e x - f(x) dx$

$$= \int_1^e (x - 1) dx - \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^e - \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \right) + [x \ln x - x]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4}$$

7) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Par récurrence :

Pour $n = 0$; $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq e$. Vrai pour $n = 0$

Supposons que $1 \leq u_n \leq e$; pour $n \geq 0$

Démontrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e$

$1 \leq u_n \leq e$ et f est croissante sur $[1, e]$ donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$

Ainsi $1 \leq u_{n+1} \leq e$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [1, e]$

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ or $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in [1, e]$

Comme $u_n \in [1, e]$ alors $f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$, ainsi (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1

Donc elle converge vers $l \in [1, e]$

Comme f est continue sur $[1, e]$ donc en l d'où $f(l) = l$ et par suite $l = 1$ ou $l = e$

Or (u_n) est décroissante et $u_0 = 2 < e$ donc $l = 1$

Feuille Annexe

