

EXERCICE 1

a). $(3 + i\sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 9 + 6i\sqrt{3} - 3 = 6 + 6i\sqrt{3}$.

b). Résolvons l'équation : $z^2 + (5 - i\sqrt{3})z + 4 - 4i\sqrt{3} = 0$.

$$\Delta = (5 - i\sqrt{3})^2 - 4(4 - 4i\sqrt{3}) = 25 - 10i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 - 16 + 16i\sqrt{3} \\ = 25 - 19 + 6i\sqrt{3} = 6 + 6i\sqrt{3} = (3 + i\sqrt{3})^2 \text{ (d'après 1/a).}$$

Une racine carrée de Δ est $= 3 + i\sqrt{3}$, l'équation admet deux racines :

$$z_1 = \frac{-(5 - i\sqrt{3}) - (3 + i\sqrt{3})}{2} = \frac{-5 + i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

$$z_2 = \frac{-(5 - i\sqrt{3}) + (3 + i\sqrt{3})}{2} = \frac{-5 + i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-4, -1 + i\sqrt{3}\}$$

Autrement : $z^2 + (5 - i\sqrt{3})z + 4 - 4i\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - [(-4) + (-1 + i\sqrt{3})]z + (-4) \times (-1 + i\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = (-4) + (-1 + i\sqrt{3}) \\ z_1 \times z_2 = (-4) \times (-1 + i\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

a). $OC = |-i| |z_B| = |z_B| = OB$. Donc le triangle OBC est isocèle de sommet principal O.

$$\cdot (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg(-i) [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

b). $z_B = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Ou : $|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.

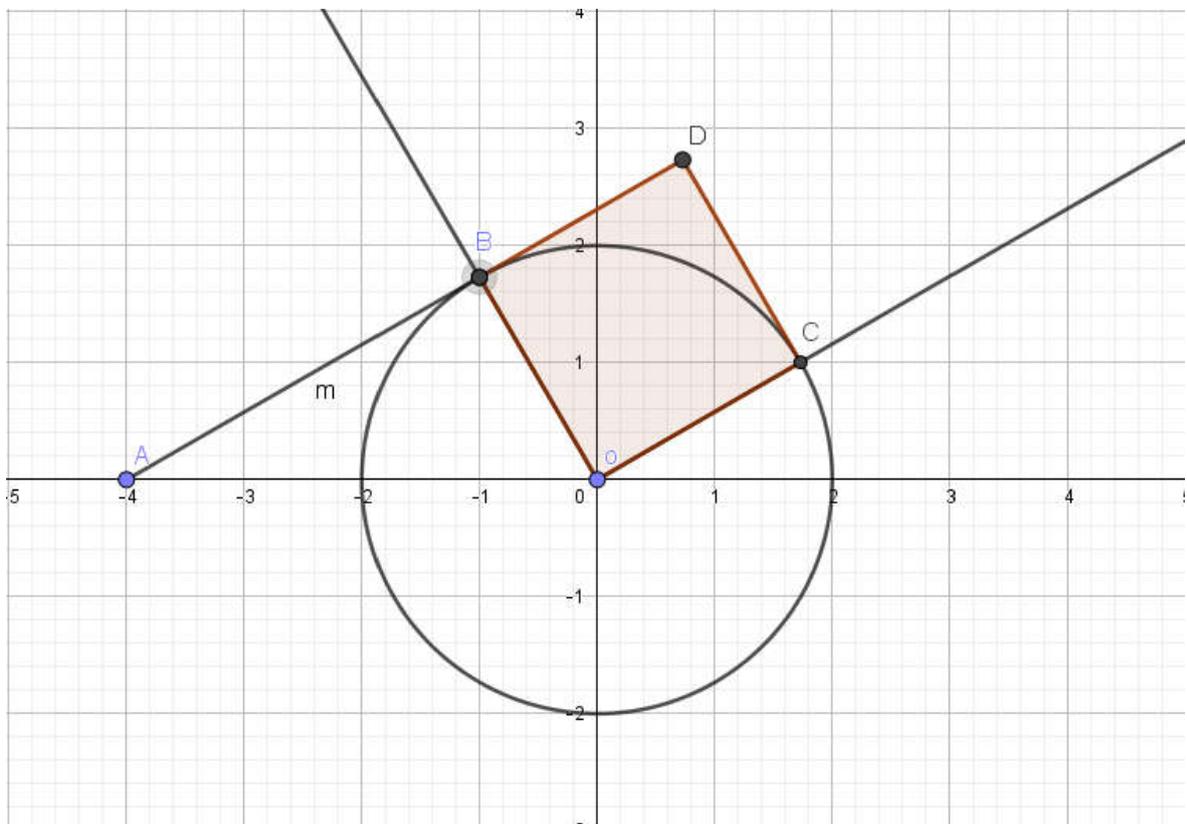
2 $\left. \begin{array}{l} \cos[\arg(z_B)] = \frac{-1}{2} \\ \sin[\arg(z_B)] = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \text{ alors } \arg(z_B) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi].$

Donc : $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On a : $|z_B| = 2 \Leftrightarrow OB = 2 \Leftrightarrow B$ appartient au cercle de centre O de rayon 2.

c). voir figure ci-dessous.

3



a). d'après 2/a on a : $OB = OC$ et $(\widehat{OB, OC}) = \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc pour prouver que le quadrilatère OCDB est un carré il suffit de montrer qu'il est un parallélogramme

or $z_D = (1 - i)z_B = z_B + (-i z_B) = z_B + z_C \Leftrightarrow \text{aff}(\overrightarrow{OD}) = \text{aff}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow OCDB$ est un parallélogramme.

Conclusion : OCDB est un carré.

b). $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = -1 + i\sqrt{3} + 4 = 3 + i\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3}(-i)(-1 + i\sqrt{3})$
 $= \sqrt{3}(-i z_B) = \sqrt{3} z_C$.

c). $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(\sqrt{3}\overrightarrow{OC}) = \text{aff}(\sqrt{3}\overrightarrow{BD})$ car $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$ vu que OCDB est un carré.

alors $\overrightarrow{AB} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BD} sont colinéaires

Conclusion : Les points A, B et D sont alignés.

d). $\text{aire}(\text{OADC}) = \frac{(OC+AD) \cdot OB}{2}$; OADC est un trapèze.

or $OC = OB = 2$ et $AD = AB + BD = \sqrt{3} OC + OC = (2 + 2\sqrt{3})$

$\text{aire}(\text{OADC}) = \frac{(2+2+2\sqrt{3}) \cdot 2}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$ (unité d'aire).

EXERCICE 2

- 1 a). $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4.67$ années = 4 ans 8 mois 1 jour.
 Un ordinateur fonctionne en moyenne 4 ans 8 mois avant la première panne du matériel.
 b). $p(X > 5) = e^{-5 \times 0.214} = 0.343$.
 c). Le nombre d'ordinateur qui n'ont aucune panne de matériel au cours de ces 5 premières années est égal à $100 \times 0.343 = 34.3$ donc 34 ordinateurs.
- 2 a). Les mises à jour effectuées sur les 100 ordinateurs fonctionnels de l'entreprise peuvent être considérées comme des épreuves identiques et indépendantes, chacune n'a que deux issues possibles contraires l'une est : S= « l'ordinateur est en panne de déprogrammation de » de probabilité 0.03, ce qui nous permet d'affirmer que Y suit une loi binomiale de paramètres (100, 0.03)
 b). $p(Y = 0) = (1 - 0.03)^{100} = (0.97)^{100}$.
 c). $E(Y) = 100 \times 0.03 = 3$. donc sur les 100 ordinateurs il y'a en moyenne 3 qui ont une panne de déprogrammation.

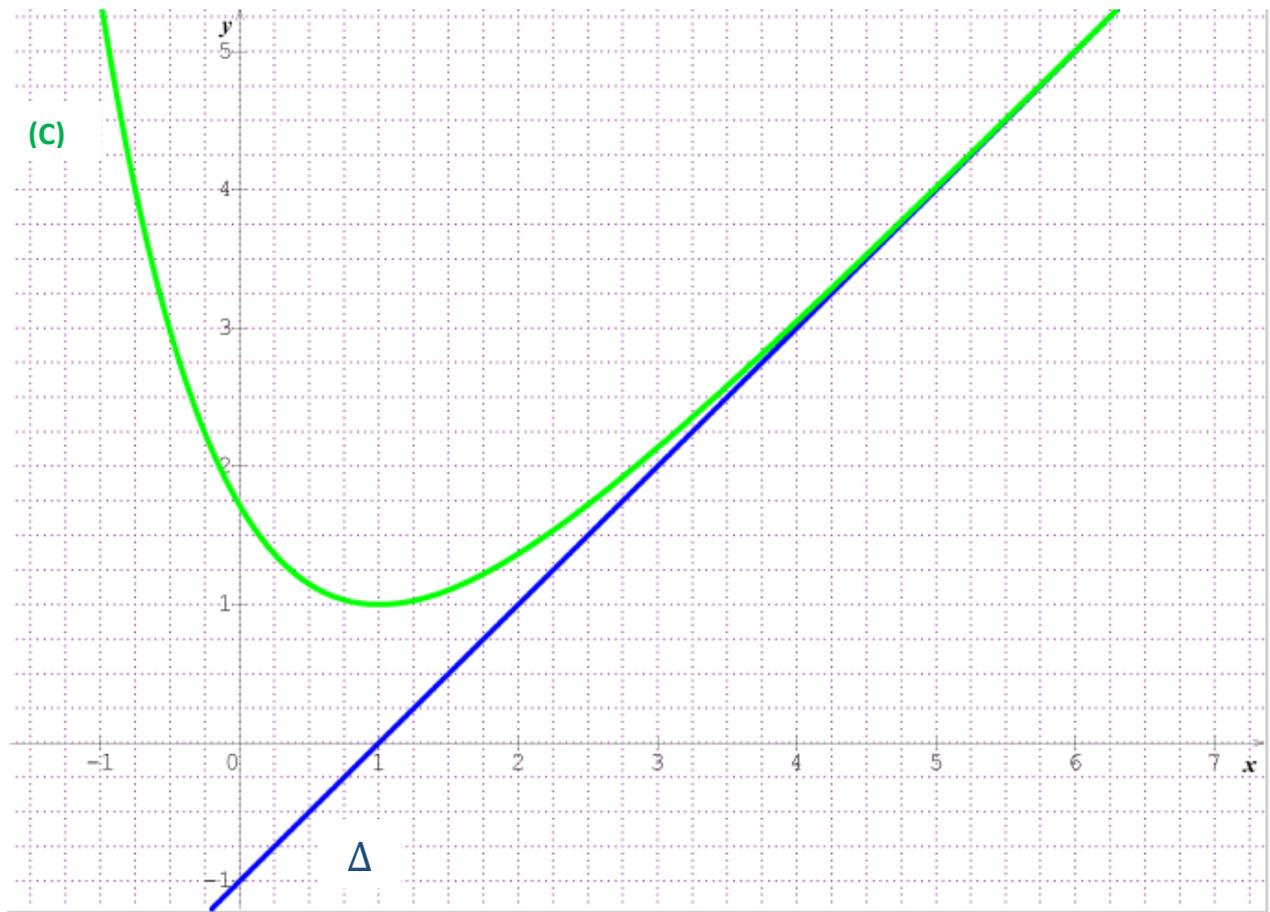
EXERCICE 3

- f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x-1 + e^{1-x}$.
- 1 a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ } alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ (★ de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$)
- Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ (d'après ★).
- Donc la droite $\Delta: y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
- c). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \left(-1 + \frac{e^{1-x}}{1-x}\right)$
 or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ } Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1-x}}{1-x} = +\infty$ et puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$
- Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)}{x} \left(-1 + \frac{e^{1-x}}{1-x}\right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{e^{1-x}}{1-x}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- (C) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $-\infty$.
- 2 a). $f'(x) = 1 + (-1)e^{1-x} = 1 - e^{1-x}$.
- b). $x \in [1, +\infty[\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow 1 - x \leq 0 \Rightarrow e^{1-x} \leq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$.
 $\triangleright x \in]-\infty, 1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow 1 - x \geq 0 \Rightarrow e^{1-x} \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$.

c) .

x	$-\infty + \infty$
f(x)	
f	$+\infty \searrow \quad \swarrow +\infty$ $\quad \quad \quad 1$

d).



3

a). $A_\lambda = \int_0^\lambda [f(x) - (x - 1)] dx = \int_0^\lambda e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^\lambda = e - e^{1-\lambda}$.

b). $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e - e^{1-\lambda} = e$.

EXERCICE 4

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a). Désignons par \mathbf{P} la propriété « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$ ».

- On a $U_0 = \frac{1}{2}$, donc $0 < U_0 < 1$ alors \mathbf{P} est vraie pour $n = 0$.
- Supposons que \mathbf{P} est vraie à l'ordre n c'est-à-dire on a $0 < U_n < 1$ (H.R)

- Démontrons que Pest vraie à l'ordre $n+1$, ce qui revient à montrer que $0 < U_{n+1} < 1$?
 - On a par hypothèse : $0 < U_n < 1 \Rightarrow -1 < U_n < 0 \Rightarrow 1 < 2 - U_n < 2$ (I)

$$\Rightarrow 2 - U_n > 0 \text{ et } U_n > 0 \text{ par suite } \frac{U_n}{2 - U_n} > 0 \text{ alors } U_{n+1} > 0$$

$$\circ U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{2 - U_n} - 1 = \frac{U_n - (2 - U_n)}{2 - U_n} = \frac{U_n - 2 + U_n}{2 - U_n} = \frac{2(1 - U_n)}{2 - U_n} < 0 \text{ car } U_n < 1 \text{ et } 2 - U_n > 0$$

D'où $U_{n+1} < 1$ (C'est Qu'il Fallait Démontrer).

Autrement : Remarquons que

$$U_{n+1} = -\frac{2 - U_n - 2}{2 - U_n} = -1 + \frac{2}{2 - U_n} \text{ or (I)} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - U_n} < 1 \text{ (II)}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2}{2 - U_n} < 2 \Rightarrow 0 < -1 + \frac{2}{2 - U_n} < 1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1 \text{ (C.Q.F.D)}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$.

b). Étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2 - U_n} - U_n = U_n \left(\frac{1}{2 - U_n} - 1 \right) = U_n \left(\frac{1 - 2 + U_n}{2 - U_n} \right) = U_n \cdot \frac{-1 + U_n}{2 - U_n} < 0 \quad \text{car } U_n > 0$$

, $(-1 + U_n) < 0$ et $2 - U_n > 0$. Donc $(U_n)_n$ est une suite décroissante.

1

Autrement : $U_n > 0$, donc la suite $(U_n)_n$ est à termes strictement positifs.

or on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2 - U_n} < 1$; D'après (II), par suite la suite $(U_n)_n$ est décroissante.

c). $(U_n)_n$ est décroissante et minorée par zéro donc elle est convergente. Soit L sa limite

$$U_{n+1} = f(U_n); \text{ où } f(x) = \frac{x}{2-x} \text{ qui est continue sur } [0, 1].$$

$$U_n \in]0, 1[\text{ donc } L \in [0, 1]$$

alors f est continue en L

$$\text{Donc On a } f(L) = L \Leftrightarrow \frac{L}{2-L} = L \Leftrightarrow L \left(\frac{1}{2-L} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow L = 0 \text{ ou } L = 1$$

Or (U_n) est décroissante donc $U_n < U_0 = \frac{1}{2}$ par suite $L = 0$

$$\text{a). } V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{1 - U_{n+1}} = \frac{\frac{U_n}{2 - U_n}}{1 - \frac{U_n}{2 - U_n}} = \frac{U_n}{2 - U_n - U_n} = \frac{U_n}{2 - 2U_n} = \frac{U_n}{2(1 - U_n)} = \frac{1}{2} V_n.$$

la suite $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{U_0}{1 - U_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

2

$$\text{b). } V_n = q^n \cdot V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{c). } V_n = \frac{U_n}{1 - U_n} \Rightarrow \frac{1}{V_n} = \frac{1 - U_n}{U_n} \Rightarrow \frac{1}{V_n} = \frac{1}{U_n} - 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} = \frac{1}{V_n} + 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} = \frac{1 + V_n}{V_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{V_n}{1 + V_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{1 + 2^n}.$$

a). S_n' est la somme de $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de

$$\text{premier terme } V_0 = 1 \text{ alors } S_n' = V_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - V_n.$$

3

b). $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n' = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - V_n = 2$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ puisque $0 < q < 1$.

c). On a pour tout n , $1 \leq 1 + \frac{1}{2^n} \leq 2 \Rightarrow 2^n \leq 2^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq 2^n \cdot 2 \Rightarrow 2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1}$.

$$2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq U_n \leq V_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_n \leq U_n \leq V_n$$

d). On a : $\frac{1}{2} V_0 \leq U_0 \leq V_0$ en additionnant ces inégalités membre à membre on obtient :

$$\frac{1}{2} V_1 \leq U_1 \leq V_1 \quad \frac{1}{2} (V_0 + V_1 + \dots + V_n) \leq U_0 + U_1 + \dots + U_n \leq V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} S_n' \leq S_n \leq S_n'$$

$$\frac{1}{2} V_n \leq U_n \leq V_n$$

a). $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0$ donc la suite $(S_n)_n$ est croissante.

4 **b).** D'après 3/d) on $S_n \leq S_n' = 2 - V_n \Rightarrow S_n \leq 2$ car $V_n > 0$ donc $(S_n)_n$ est majorée par 2

la suite $(S_n)_n$ est croissante et majorée par 2 donc elle converge .Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

puisque $\frac{1}{2} S_n' \leq S_n \leq S_n'$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n' = 2$

Donc : $\frac{1}{2} \times 2 \leq l \leq 2 \Rightarrow 1 \leq l \leq 2$.