EXERCICE 1

I	1	**Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.**	**b**
	2	**P ($\bar{B}$) = p(A) x p($\bar{B}$ / A) + p($\bar{A}$) x $p(\bar{B}/\bar{A})$ = 0.2x 0.6 +0.8 x0.3 = 0.36**	**c**
II	1	$\lim_{n\to+\infty} n\, e^{-n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{\frac{e^n}{n}} = 0$ **car** $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$	**a**
	2	**Pour n** $\in \mathbb{N}^*$ **, on pose** $V_n = \left(\frac{-x}{2}\right)^n$ $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \Leftrightarrow \left\lvert\frac{-x}{2}\right\rvert < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$	**b**

EXERCICE 2

1) **(E) :** $z^2 - (1+i\sqrt{3})(1-i)z + 2\sqrt{3} = 0$ **.**

a) $(1-i)^2 - (1+i\sqrt{3})(1-i)^2 + 2\sqrt{3} = -2i - (1+i\sqrt{3})(-2i) + 2\sqrt{3} = -2i + 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$.

Alors $z_1 = 1 - i$ **, est une solution de (E).**

b) Soit z_2 la seconde solution. $z_2(1-i) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2(1+i)\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ **.**

<u>Autrement</u> : 1-i +z_2= $\frac{-[-(1-i)(1+i\sqrt{3})]}{1}$ **= 1-i +i $\sqrt{3}$ (1-i)donc : z_2= $i\sqrt{3}$ (1-i) = $\sqrt{3} + i\sqrt{3}$.**

2) $z_A = 1 - i$ **,** $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ **et** $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ **.**

a) $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **,**

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ **.**

b). $(i\sqrt{3})z_A = (i\sqrt{3})(1-i) = i\sqrt{3} + \sqrt{3} = z_B$ **.**

Ou : $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}(1 - i) = i\sqrt{3}z_A$.

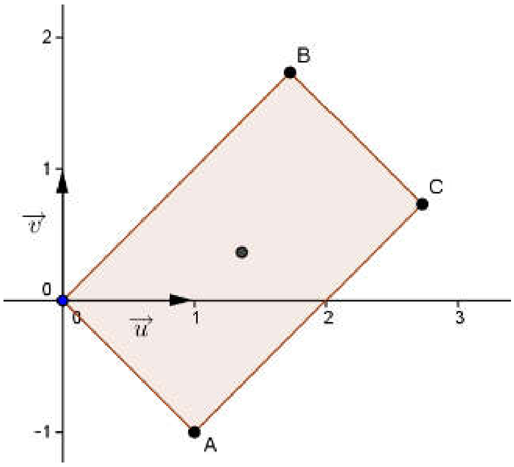
c) $z_A + z_B = z_A + (i\sqrt{3})z_A = (1 + i\sqrt{3})z_A = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = z_C$ **.**

d) $z_A + z_B = z_C \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ **Alors le quadrilatère OACB est un parallélogramme**

De plus $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv$ **arg** $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$d'où OACB est un rectangle.

e)



3).a/ .G centre de gravité du triangle OAI $\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{O} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI}$

$\Leftrightarrow z_G = \frac{1}{3}\,(z_A + z_I)$ **).**

b/. $z_I = \frac{1}{2}(z_O + z_C) = \frac{1}{2} z_C$.

$$z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z_C + z_A\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_A + z_A\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1\right)z_A = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}z_A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}+i)z_A$$

c/. $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+i\right)z_A = \frac{\sqrt{3}}{6}.2e^{i\frac{\pi}{6}}.\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

A(2, - 2, 2) , B(2, 0, 0) et $C\left(\frac{6}{5},0,\frac{2}{5}\right)$.

1) .a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-2\\\frac{8}{5}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{4}{5}\times\frac{4}{5} + (-2)\times 0 + \frac{8}{5}\times\left(\frac{-2}{5}\right) = 0$

Alors ABC est un triangle rectangle en C.

b)x + 2 y + 2z – 2 = 0 est une équation cartésienne d'un plan(π) .

- $x_A + 2y_A + 2\,z_A - 2 = 2 - 4 + 4 - 2 = 0\ alors\ A\ \epsilon\ (\pi)$.
- $x_B + 2y_B + 2\,z_B - 2 = 2 + 2.0 + 2.0 - 2 = 0\quad B\ \epsilon\ (\pi)$**.**
- $x_C + 2y_C + 2\,z_C - 2 = \frac{6}{5} + 2.0 + 2.\frac{2}{5} - 2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 0 alors\quad C\ \epsilon\ (\pi)$**.**

Or par les trois points non alignés A, B et C ne passe qu'un seul plan.

Conclusion : le plan (ABC) a pour équation cartésienne :x + 2 y + 2z – 2 = 0

2)a).

$$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix} \wedge \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-5 & 0\\4 & -1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & -1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2 & 2\\-5 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$est un vecteur normal à (ABC) alors est un vecteur directeur de Δ.

d'où $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 2t,\ t \in IR \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

b)M (x, y, z) ∈ P⋂Δ ⇔ .$\begin{cases} x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

$4(2+t) + 8(-2+2t) - (2+2t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 18t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ d'où : $P \cap \Delta = \{I(3,0,4)\}$.

c)Soit Ω le centre de la sphère S. S est tangente au plan (ABC) en A alors Ω∈Δ d'autre part Ω∈P alors Ω = I.

Soit R le rayon de la sphère S.

$R = IA = \sqrt{1+4+4} = 3$.

3).a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ 0 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\,X\,\frac{9}{5}(2x1 + 0x0 + \ (-1)x2\,) = \frac{18}{25}(\,2-2) = 0$, Alors le triangle CIB est rectangle en C.

b)Le triangle CIB et rectangle en C et J le milieu de [IB] alors $JC = JB = JI = \frac{IB}{2}$.

Le triangle ABI et rectangle en A et J le milieu de [IB] alors $JA = JB = JI = \frac{IB}{2}$.

D'où $JA = JB = JI = \frac{IB}{2} = JC$.

Donc I, B, A et C appartiennent à la sphère S' de centre J et de rayon $\frac{IB}{2}$.

c)A, B et C appartiennent à la fois au plan (ABC) et à la sphère S' alors S' coupe (ABC) suivant le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en C donc l'intersection est le cercle de diamètre [AB].

EXERCICE 4

f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{-x+1} - e^{x-3}$

1) .a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **.**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3}\frac{e^{x}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C) admet au voisinage de +∞ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ dirigée vers le bas.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1}}{xe^{x}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C) admet au voisinage de -∞ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ dirigée vers le haut.

2**). a) f est dérivable sur IR et** $f'(x) = -e^{-x+1} - e^{x-3}$ **= - (** $e^{-x+1} + e^{x-3}$) < 0

pour tout $x \in \mathbb{R}$ ***par suite f est strictement cropissante sur*** **IR.**

b).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

c) $f(2) = 0$.
D'après le tableau de variations de f on a :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

<u>Ou autrement</u> : ▪ $x \geq 2$
f est croissante $\Big\}$ **$f(x) \geq f(2)$ par suite $f(x) \geq 0$.**
▪ $x \leq 2$
f est décroissante $\Big\}$ **$f(x) \leq f(2)$ par suite $f(x) \leq 0$.**

3). a) $f''(x) = \left(-e^{-x+1} - e^{x-3}\right)' = -(-x+1)'e^{-x+1} - (x-3)'e^{x-3} = e^{-x+1} - e^{x-3} = f(x)$.

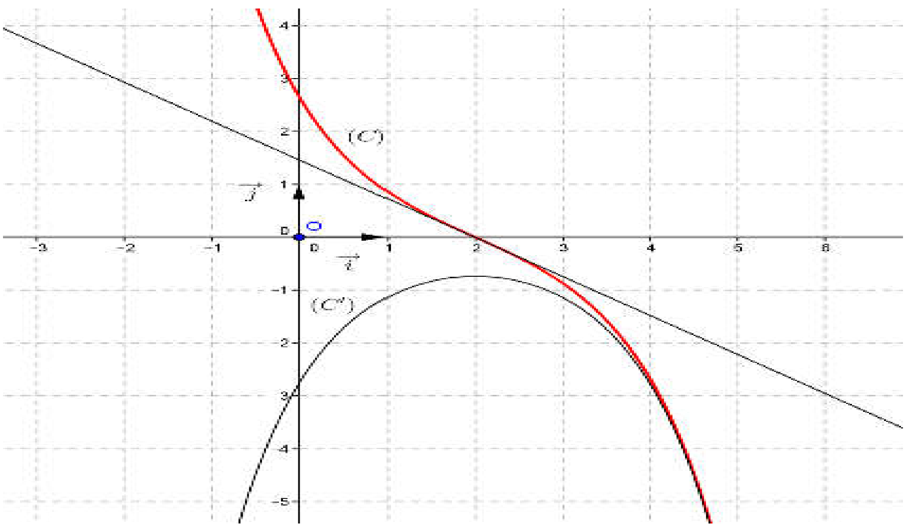
b) f'' s'annule en changeant de signe en 2 et f(2) = 0 alors le point I(2, 0) est un point d'inflexion de (C).

c) Soit T la tangente à (C) en I. $\begin{aligned} T : y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= -2e^{-1}x + 4e^{-1} \end{aligned}$.

4) .a) $f(x) - f'(x) = \left(e^{-x+1} - e^{x-3}\right) - \left(-e^{-x+1} - e^{x-3}\right) = 2e^{-x+1} > 0$.

Alors (C) est au dessus de (C').

b)voir figure



$-2e^{-1} \times 3 + 4e^{-1} = -2e^{-1} \Rightarrow A\left(3, -2e^{-1}\right) \in T$.

5)a) $A_\lambda = \int_0^\lambda |f(x) - f'(x)|\,dx = \int_0^\lambda 2e^{-x+1}dx = \left[-2e^{-x+1}\right]_0^\lambda = 2e - 2e^{1-\lambda}$.ua .

b) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(2e - 2e^{1-\lambda}\right) = 2e$