Exercice1

1- f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

D est le domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$) de f, la droite des abscisses , les droites d'équations x = 1 et x = e .

L'unité graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé est 3cm .

a)Représenter D

b)Calculer l'aire de D en cm^2.

2)Pour tout naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 t^n e^t \, dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout n de$\mathbb{N}^*$,

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

b) Calculer I_0 puis I_1, I_2, I_3.

Exercice2

A/ 1- Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 = (2+3i)^4$

Construire leurs images dans le plan complexe .

2-On désigne par A,B,C les points du plan complexe d'affixe

$$z_0 = 3 \ ; \quad z_1 = 2 - i \quad et \quad z_2 = -1 - i$$

a) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points pondérés :

(A,-1) ; (B,1) ; (C , 1).

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MB^2 + MC^2 - MA^2 = 1.$$

B/ Soit A', B', C' les images respectives des points A , B , et C par la transformation f du plan . Comparer les angles ($\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$) et ($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$) Dans chacun des cas suivants :

- f est une homothétie de rapport -2 de centre quelconque .
- f est une symétrie orthogonale d'axe quelconque .

On construira la figure pour mieux visualiser les angles .

PROBLEME

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$ et de construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) , ce qui fait l'objet de la partie A ; puis de décrire un procédé d'approximation du nombre pour lequel f atteint un minimum , ce qui fait l'objet de la partie B .

A/ 1) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites aux bornes de l'intervalle de définition .

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule et que $1{,}30 \leq \alpha \leq 1{,}35$

c)Etudier le signe de g(x) .

2) a) Etudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition .

b) Exprimer f'(x) à l'aide de g(x) .En déduire le sens de variation de f .

3) Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ,i ,j) d'unité graphique 2cm .

a) Démontrer que la droite Δ d'équation y = x est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_f$) .

b) Déterminer le point d'intersection B de ($\mathcal{C}_f$) et de Δ ; préciser la positon de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à Δ .

c) Construire ($\mathcal{C}_f$) et Δ en précisant la tangente en B à ($\mathcal{C}_f$) .

4) Pour tout réel t $\geq$e , calculer l'aire A(t) de la portion du plan comprise entre ($\mathcal{C}_f$) et Δ et les droites d'équations x = e et x = t .

B/ Approximation de α

1- a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 est équivalente à l'équation h(x) = x où h est la fonction définie sur $I = [\,1{,}30 \;;\; 1{,}35\,]$ par h(x) = $\sqrt{2 - \ln x}$.

b) justifier la décroissance de h sur I et montrer que pour tout x de I , h(x) appartient à I .

c) Prouver que pour tout x élément de I , $\frac{-1}{3} \leq$ h'(x) $\leq$ 0.

En déduire que pour tout x de I , $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$

d)Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout élément de I , $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$.

3-soit (U_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence U_{n+1} = h (U_n) et la condition initiale U_0 = 1,30 .

a) Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{5}{100}(\frac{1}{3})^n$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

d) Préciser un entier n_0 tel que $|U_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$.Que représente U_{n_0} pour α ?

Donner la valeur de U_{n_0} et une valeur décimale approchée à 10^{-6} près de α .

On donne :

$\sqrt{2 - \ln U_7} = 1{,}314096106; \sqrt{2 - \ln U_8} = 1{,}314097007; \sqrt{2 - \ln U_9} = 1{,}314096746; \sqrt{2 - \ln U_{10}} = 1{,}314096821$

$\sqrt{2 - \ln U_{11}} = 1{,}3140968$.