

SERIES: SET-MTI-MTGC/TSE

EXERCICE 1 : (6 points)

1)- Démontrer que, quelque soit l'entier naturel n, on a

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0[7]$$

2)- Résoudre dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$, l'équation :

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

3)- Résoudre le système :

$$(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases} \quad m \text{ étant le P.P.C.M des entiers a et b.}$$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, et C d'affixes respectifs :

$$a = 2 - 2i\sqrt{3} ; \quad b = 2 + 2i\sqrt{3} ; \quad c = 8$$

1) Ecrire a ; b ; et c sous la forme trigonométrique. Placer les points A, B et C.

2) Calculer le nombre complexe :

$q = \frac{a-c}{b-c}$ que l'on écrira sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC.

3) Déterminer le barycentre G des points pondérés $(A, |a|)$; $(B, |a|)$; $(C, |c|)$ puis placer le point G.

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\left\| \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \right\| = \left\| \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} \right\|$$

EXERCICE 2 : (4points)

1) a) Vérifier que tout nombre réel $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

b) Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Déduire de a), la valeur de l'intégrale :

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2} dx$$

2) a)- En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de α , l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$$

b)- Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand le nombre réel positif tend vers 0.

3)- Soit $A = \overline{10101010}$ un nombre écrit en base deux. Ecrire A dans le système de numération décimale.

PROBLEME : (10points)

On désigne par $\mathcal{R} = (O, \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, et a, b , et c des réels quelconques.

Les fonctions f_0, f_1, f_2 et f sont respectivement définies sur l'ensemble \mathbb{R} des réels par :

$$f_0(x) = e^{\frac{-x}{2}} ; \quad f_1(x) = x e^{\frac{-x}{2}} ; \quad f_2(x) = x^2 e^{\frac{-x}{2}} \quad \text{et} \quad f(x) = (a + bx + cx^2) e^{\frac{-x}{2}}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et (\mathcal{C}_2) les courbes représentatives de f_0, f_1 , et f_2 dans le repère.

A. On se propose de représenter $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et (\mathcal{C}_2) .

1. Etudier les variations des fonctions f_0, f_1 , et f_2
2. Préciser par leurs coordonnées dans le repère \mathcal{R} , les points d'intersection de (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_0) ; (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_0) ; (\mathcal{C}_2) et (\mathcal{C}_1) .
3. Etudier sur l'ensemble \mathbb{R} des réels, le signe de chacune des expressions : $f_1(x) - f_0(x)$; $f_2(x) - f_0(x)$ et $f_2(x) - f_1(x)$.
4. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et (\mathcal{C}_2) dans le repère \mathcal{R} , et hachurer le domaine fermé (E) déterminé par les trois courbes $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et (\mathcal{C}_2) , c'est-à-dire l'ensemble (E) des points M du plan, dont les coordonnées $(x ; y)$ dans le repère \mathcal{R} vérifient :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f_2(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases}$$

B. On se propose de calculer l'aire de (E)

1. Soit n , un entier naturel quelconque. Démontrer qu'en posant :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{\frac{-t}{2}} dt ;$$

On définit une fonction I_n qui a l'ensemble \mathbb{R} des réels pour ensemble de définition.

2. Soit n , un entier naturel et x un réel quelconque.
Démontrer que :

$$I_{n+1} = -2x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} + 2(n+1)I_n(x)$$

3. Soit x un réel quelconque.

a) Calculer $I_0(x)$ en fonction de x .

b) En déduire les expressions de $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .

4. Calculer l'aire de (E).

C. On se propose de calculer la dérivée d'ordre n de f . On désigne par f^0 (ou f), $f^{(1)}$ (ou f'), $f^{(2)}$ (ou f''), $f^{(3)}$ (ou f'''), etc. les dérivées successives de la fonction f .

1. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , on peut trouver trois réels α_n , β_n et γ_n vérifiant pour tout nombre réel :

$$f^{(n)}(x) = (\alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2) e^{\frac{-x}{2}}$$

On trouvera $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et $\gamma_0 = c$ et pour chaque entier naturel n , le raisonnement par récurrence montrera que : α_{n+1} , β_{n+1} et γ_{n+1} , vérifient :

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - \frac{1}{2} \alpha_n, \quad \beta_{n+1} = 2\gamma_n - \frac{1}{2} \beta_n \quad \text{et} \quad \gamma_{n+1} = -\frac{1}{2} \gamma_n$$

2. Pour chaque entier naturel n , on pose :

$$\beta_n' = \beta_n + 4n \gamma_n \quad \text{et} \quad \alpha_n' = \alpha_n + 2n \beta_n + 4n(n+1) \gamma_n$$

Démontrer que (γ_n) , (β_n') , et (α_n') sont des suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

3. En déduire pour chaque entier naturel n , l'expression de α_n , β_n et γ_n en fonction de n , a , b et c .